ORSAY
n° d'ordre : 2955

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : Mathématiques

PAR

Monsieur Jean-Lin JOURNE

SUJET : Conjugaison d'opérateurs pseudo-différentiels par des changements de variable préservant BMO.

soutenue le 27 février 1981 devant la Commission d'examen

MM. Jean-Pierre KAHANE Président

Yves MEYER

Nicolas VAROPOULOS

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547318_0035

Code matière AMS (1980) : 34 A 10 - 42 A 45.

ORSAY
n° d'ordre : 2955

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : Mathématiques

PAR

Monsieur Jean-Lin JOURNE

SUJET : Conjugaison d'opérateurs pseudo-différentiels par des changements de variable préservant BMO.

soutenue le 27 février 1981 devant la Commission d'examen

MM. Jean-Pierre KAHANE Président

Yves MEYER

Nicolas VAROPOULOS

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

J'aimerais avant toute chose remercier chaleureusement Yves Meyer pour le temps qu'il m'a volontiers consacré dans la préparation de cette thèse. Son enthousiasme communicatif a été une stimulation déterminante.

Jean-Pierre Kahane a non seulement présidé le jury mais également lu cet ouvrage dans ses moindres détails, ce qui lui a inspiré de nombreuses remarques de forme qui m'ont été très utiles. Je tiens vivement à la remercier ici, et si le lecteur ne se perd pas, il peut également le remercier.

Enfin chacun pourra constater que la frappe de madame Dumas, que sa modestie a empêchée de taper ce paragraphe, est impeccable. J'ai eu en plus le privilége de voir que la perspective de retaper une trentaine de pages n'altérait nullement son excellente humeur, ce dont je lui suis êxtr êmement reconnaissant.

Avertissement

Cet ouvrage, dont le contenu original débute page 1, est précédé de plusieurs pages ayant pour but de faciliter la compréhension du lecteur.

L'avant-propos rappelle certains résultats et définitions étroitement liés au sujet et nous permet d'introduire certaines notations.

Suivent ensuite une introduction, une table des matières et un graphe où est explicité l'enchainement, pas toujours linéaire, des lemmes, des rappels et des propositions, dans les démonstrations les plus longues.

Signalons enfin que les deux parties sont totalement indépendantes.

Avant-propos

1. Le groupe $\mathcal{G}$.

On appelle $\mathcal{H}_o$ le groupe des homéomorphismes croissants de $\mathbb{R}$ dans lui-même préservant les ensembles de mesure nulle. A tout h de $\mathcal{H}_o$ on associe l'opérateur $V_h : \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ défini par $V_h(f) = f \circ h$.

On appelle $\mathcal{G}$ le sous-groupe suivant de $\mathcal{H}_o$:

$$\mathcal{G} = \left\{ h / h \in \mathcal{H}_o \text{ et } V_h \text{ est un isomorphisme de BMO} \right\}.$$

Peter Jones a caractérisé $\mathcal{G}$ au moyen de la classe A_∞ de Muckenhoupt ([10], [9]) ; i. e. l'ensemble des fonctions positives et localement intégrables ω telles que $\exists\, (\alpha,\beta) \in]0,1[^2$, $\forall$ $(E,I)/E \subset I$, E mesurable, I intervalle

$$\frac{|E|}{|I|} \leq \alpha \Longrightarrow \frac{\int_E \omega(x)\,dx}{\int_I \omega(x)\,dx} \leq \beta .$$

THEOREME P. J. Soit h un homéomorphisme croissant de $\mathbb{R}$ dans lui-même préservant les ensembles de mesure nulle. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $h \in \mathcal{G}$

(ii) V_h est continu sur $BMO(\mathbb{R})$

(iii) h' est dans la classe A_∞.

En particulier si $h \in \mathcal{G}$, $\log h' \in BMO$; et si $\|\log h'\|_{BMO}$ (noté par la suite $\|\log h'\|_*$) est assez petit, h est dans $\mathcal{G}$.

2. Le groupe $\mathcal{G}$ et la conjecture de Calderón sur les courbes de Lavrentiev.

Rappelons qu'on appelle courbe de Lavrentiev une courbe Γ plane, simple et localement rectifiable vérifiant une condition "corde-arc" du type suivant :

$$\exists\ \delta > 0\ /\ \forall\ (M,N) \in \Gamma^2 \quad \frac{\overset{\frown}{MN}}{\|\overrightarrow{MN}\|} < 1 + \delta.$$

Γ sépare $\mathbb{C} - \Gamma$ en deux composantes connexes Ω_1 et Ω_2.

La conjecture de Calderón est que :

$$L^2(\Gamma) = H^2(\Omega_1)/\Gamma + H^2(\Omega_2)/\Gamma \quad ; \quad \text{(cf. [3])}.$$

Elle a été résolue avec l'hypothèse $\delta < \delta_o$; (cf. [3]).

On désigne par Φ_1 (resp. Φ_2) la représentation conforme du demi-plan supérieur (resp. inférieur) sur Ω_1 (resp. Ω_2) normalisée de sorte qu'elle s'étende en un homéomorphisme à la frontière.

Soit $z(s)$ une paramétrisation normale de Γ.

On définit h_1 (resp. h_2) de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi_1(h_1(s)) = z(s).$$

On sait alors que les homéomorphismes h_1 et h_2 sont dans $\mathcal{G}$ ([13], [16]). On pose enfin $h = h_1 \circ h_2^{-1}$ et on désigne par U_h l'opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R})$ défini par $U_h(f) = (f \circ h) \times \sqrt{h'}$.

La conjecture de Calderón relative à la courbe Γ est équivalente à $\|U_h H U_{h^{-1}} - H\| < 2$; (cf. [3]). Ici H désigne la transformée de Hilbert normalisée pour être isométrique sur L^2 et $\|\ \|$ désigne la norme d'opérateur sur L^2. La conjecture de Calderón générale serait d'ailleurs équivalente à $(\forall\ h \in \mathcal{G},\ \|U_h H U_{h^{-1}} - H\| < 2)$ si la conjecture suivante de Kenig était vraie : "la correspondance entre l'ensemble des courbes de Lavrentiev (modulo les similitudes) et $\mathcal{G}$ (modulo les transformations affines) est bijective". On sait déjà qu'elle est injective grâce à ([1]).

3. Applications quasi-conformes. Théorème d'Ahlfors.

Donnons tout d'abord la définition géométrique des applications quasi-conformes de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même, qui se trouve dans [12].

Soit φ un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même. Pour tout x dans $\mathbb{R}^n$ et r dans $\mathbb{R}_+^*$ on définit $L_\varphi(r,x)$, $\ell_\varphi(r,x)$ et $H_\varphi(x)$ par :

$$L_\varphi(r,x) = \sup_{d(x,y)=r} d(\varphi(x),\varphi(y))$$

$$\ell_\varphi(r,x) = \inf_{d(x,y)=r} d(\varphi(x),\varphi(y))$$

$$H_\varphi(x) = \limsup_{r \to 0} \frac{L_\varphi(r,x)}{\ell_\varphi(r,x)}.$$

DEFINITION. φ est dite K-quasi-conforme si $\|H_\varphi\|_\infty \leq K$.

Appelons $J_\varphi(x)$ la matrice jacobienne de φ en x, si elle existe.

PROPRIETES FONDAMENTALES. Si φ est K-quasi conforme, φ préserve les ensembles de mesure nulle, est presque partout différentiable et vérifie (K) : i. e. $\|J_\varphi\|^n < K^n |\det J_\varphi|$, p. p.

Réciproquement, si J_φ existe presque partout, est continue et vérifie (K) p. p. alors φ est K-quasi conforme.

Suivons maintenant Ahlfors dans [1], pour le cas $n = 2$.

Si f, homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, est p. p. différentiable, alors son Jacobien garde un signe constant. Nous supposerons que celui-ci est positif, ce qui nous donne la définition "orientée" suivante : $f'_{\bar{z}}$ et f'_z désignent respectivement $\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y})$ et $\frac{1}{2}(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y})$. Appelons μ_f la fonction définie p. p. $\frac{f'_{\bar{z}}}{f'_z}$. On dira que f est quasi-conforme si son jacobien est dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et si $\|\mu_f\|_\infty < 1$.

De plus : f est K-quasi conforme $\Leftrightarrow \|\mu_f\|_\infty \leq \frac{K-1}{K+1}$.

Ahlfors a montré dans [1] la réciproque suivante :

THEOREME A_1. Soit $\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\|\mu\|_\infty < 1$. Il existe f telle que $\mu_f = \mu$. Si $\mu_{f_1} = \mu_{f_2}$ alors $f_1 \circ f_2^{-1}$ est une homographie.

On notera f^{μ} l'application telle que $\mu_f = \mu$ et laissant fixe $0, 1$ et ∞. Elle est donc unique.

Soit $\mu \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ et $\|\mu\|_{\infty} < 1$. Les applications $f^{t\mu}$ $(t \in [0,1])$ constituent un chemin dans les applications quasi-conformes reliant f^{μ} à f. Yves Meyer a montré dans [6] que les calculs d'Ahlfors impliquent le théorème suivant :

THEOREME A_2. $\exists C_1 > 0$ <u>telle que si</u> $\mu \in L^{\infty}(\mathbb{R}^2)$ <u>et</u> $\|\mu\|_{\infty} < 1$, <u>alors pour tout</u> $t_o \in [0,1]$ $f^{t\mu}$ <u>est p. p. dérivable par rapport à</u> t <u>en</u> $t = t_o$ <u>et si</u> A_{t_o} <u>est défini par</u>

$$A_{t_o} = \left(\frac{\partial}{\partial t} f^{t\mu}\right)_{t=t_o} \circ \left(f^{t_o\mu}\right)^{-1},$$

<u>alors</u>

$$\left\|\frac{\partial}{\partial z} A_t\right\|_* \leq C_1 \frac{\|\mu\|_{\infty}}{1-\|\mu\|_{\infty}^2} \quad \underline{\text{et}} \quad \left\|\frac{\partial}{\partial \bar{z}} A_t\right\|_{\infty} \leq \frac{\|\mu\|_{\infty}}{1-\|\mu\|_{\infty}^2}.$$

Introduction

Ce travail fait suite à un récent article de Coifman et Meyer intitulé : "Le théorème de Calderón par les méthodes de variable réelle" (cf. [3]).

Dans cet article les auteurs sont amenés à considérer les opérateurs $U_h H U_{h^{-1}}$ et $V_h H V_{h^{-1}}$, lorsque h est un élément de $\mathcal{G}$. Leur point de vue est la régularité de la dépendance de ces opérateurs en fonction de $\log h'$. Nous systématisons ici l'étude de deux aspects de cette dépendance.

Nous commençons la première partie en caractérisant les chemins de $\mathcal{G}(\{h_t\ ,\ t\in[0,1]\}$ avec $\forall\ x\in\mathbb{R}\quad h_0(x)=x$ et $\forall\ t\in[0,1],\ h_t\in\mathcal{G})$ tels que l'application : $[0,1]\longrightarrow\mathcal{L}(L^2,L^2)$ qui à t associe $U_{h_t} H U_{h_t^{-1}}$ soit dérivable à dérivée bornée pour la topologie normale. Le théorème 1 nous dit que cette condition est équivalente à la suivante : l'application $[0,1]\longrightarrow$ BMO qui à t associe $(\log h_t)'$ est dérivable à dérivée bornée. Ce résultat fait écho à celui de Guy David cité page 3 où la dérivabilité bornée est remplacée par la continuité. Ce surcroît de régularité entraîne l'existence d'une fonction $G : [0,1]\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ telle que

(i) $\forall\ x\in\mathbb{R}$, $h_t(x)$ considéré comme fonction de t vérifie l'équation différentielle

$$y'(t) = G(t\ ,\ y(t)) \qquad y(0) = x.$$

(ii) $\exists\ C>0/\ \forall\ t\in\mathbb{R}\qquad \|G'_x(t,.)\|_* < C.$

La réciproque à cette assertion est d'ailleurs implicitement démontrée dans [3].

Nous sommes donc naturellement conduits à étudier systématiquement les

équations différentielles du type suivant :

$G : [0,1] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ est supposée continue et vérifier $\exists C \geq 0 / \forall t \in [0,1]$ $\|G'_x(t,.)\|_* < C$.

Soit pour $(t_o,x) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$ l'équation notée $E(t_o,x)$: $y'(t) = G(t,y(t))$, $y(t_o) = x$.

La proposition 2 affirme l'existence et l'unicité d'une solution de $E(t_o,x)$ définie sur $[0,1]$ et notée $y(t_o,t,x)$. De plus, pour tout $(t,t_o) \in [0,1]^2$, $y(t_o,t,.)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

Le théorème 2 nous précise que dans le cas où $n = 1$ cet homéomorphisme est dans $\mathcal{G}$.

Le théorème 3 généralise en dimension 2 le théorème 2 de la façon suivante : si $G : [0,1] \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ est continue et vérifie :

$\exists \; C > 0 / \forall \; t \in [0,1] \; \left\| \frac{d}{d\bar{z}} G(t,.) \right\|_\infty < C$, alors les homéomorphismes $y(t_o,t,.)$ sont quasiconformes et par conséquent induisent des isomorphismes de $BMO(\mathbb{C})$ par composition à droite (cf. [14]). Notons que, si B est la transformation de Beurling,

$$\frac{d}{dz} G(t,.) = B\left[\frac{d}{d\bar{z}} G(t,.)\right] .$$

Donc, B envoyant continûment $L^\infty(\mathbb{C})$ dans $BMO(\mathbb{C})$, la seule condition $\left\| \frac{d}{d\bar{z}} G(t,.) \right\|_\infty < C$ entraîne que G vérifie les hypothèses de la proposition 2.

Nous concluons cette première partie en montrant comment le théorème 3 est lié aux constructions d'Ahlfors de chemins quasi-conformes (cf. [1]).

Cette première partie comporte une annexe où l'on esquisse un analogue du théorème 1 en remplaçant U_h par V_h et L^2 par BMO. Nous répondons également à une question de Coifman : "A quelle condition sur $h \in \mathcal{H}_o$, $V_h H V_{h^{-1}}$ est-il continu sur l'espace Lipschitz-α ? "

Toujours dans ce même article Coifman et Meyer montrent que, en un sens qu'ils précisent, $U_h H U_{h^{-1}}$ est une fonction analytique de $\log h'$ dans l'ouvert de BMO : $\Omega = \{\log h' \; , \; h \in \mathcal{G}\}$. Pour une raison algébrique simple un tel résultat ne peut

être espéré si l'on remplace H par autre chose. Toutefois on peut donner une condition nécessaire et suffisante lorsque T commute avec les translations (i. e. : T est un multiplicateur) pour que $U_h T U_{h^{-1}}$ soit une fonction analytique de $\log h'$ dans une boule de L^∞ centrée à l'origine. Précisément nous avons le théorème suivant :

THEOREME. Soient $m \in L^\infty(\mathbb{R})$ et T_m l'opérateur continu sur L^2 défini par $\widehat{T_m(f)} = m.\hat{f}$. Les deux conditions suivantes sont équivalentes :

I. Il existe une suite T_k d'opérateurs k-linéaires symétriques : $(L^\infty)^k \longrightarrow \mathcal{L}(L^2, L^2)$ tels que

i. $T_o = T_m$

ii. $\exists\, C > 0, \quad \exists\, \delta > 0 / \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \forall\, u \in L^\infty$

$$\|T_k(u, u, \ldots, u)\| < C\left(\frac{\|u\|_\infty}{\delta}\right)^k$$

iii. $h \in \mathcal{H}_o$ et $\|\log h'\|_\infty < \delta \Longrightarrow$

$$U_h T_m U_{h^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} T_k(\log h', \log h', \ldots, \log h').$$

II. m est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction analytique bornée définie sur un secteur du type : $\{z \in \mathbb{C} / |\mathrm{Im}\, z| < C\, |\mathrm{Re}\, z|\}$.

Il est aisé de formuler une généralisation de cet énoncé en dimension supérieure. Nous ne savons le démontrer que dans le cas particulier où m est égal à $\frac{\xi}{|\xi|}$ ou $|\xi|^{i\gamma}$. L'opérateur T_m est alors soit la transformée de Riesz soit $\Delta^{i\gamma}$.

Signalons que Coifman pense avoir démontré le cas général.

Table des matières

Avertissement ..... o

Avant propos i

Introduction v

Table des matières viii

Graphe x

Première partie :

- Chemins dans $\mathcal{G}$ 1
- Proposition 1 1
- Théorème 1. Différentes caractérisations des chemins dans $\mathcal{G}$ dérivables à dérivée bornée 2
- Lemme 1 5
- Démonstration du lemme 1 6
- Théorème 2. Existence et unicité des solutions de $y'(t)=G(t,y(t))$; dépendance en fonction du point initial 9
- Proposition 2 11
- Proposition 3 11
- Lemme 2 12
- Démonstration de la proposition 3 13
- Lemme 3 13
- Démonstration du lemme 3 14
- Démonstration de la proposition 2 15
- Lemme 4 17
- Démonstration du théorème 2 19
- Lemme 5 19
- Lemme 6 : Stabilité de $\mathcal{G}$ par convergence compacte 22
- Théorème 3 : généralisation du théorème 2 en dimension 2 23
- Lemme 7 24
- Lemme 8 : Analogue du lemme 6 en grande dimension 25
- Théorème 3 bis : généralisation du théorème 3 en grande dimension. 26

Annexe à la première partie 28

- A1. Démonstration de la proposition 1 28
- A2. Comportement global de $V_h H V_{h^{-1}}$-H et théorème 4 31
- A3. Continuité de $V_h H V_{h^{-1}}$ sur $\Lambda_\alpha^{h^{-1}}$ et théorème 5 35

Deuxième partie : Une application du théorème de Calderón 40

- Proposition 1 : Condition nécessaire pour être un "bon multiplicateur" en dimension n 41
- Théorème 1 : Caractérisation des "bons multiplicateurs" en dimension 1 42
- Démonstration de la proposition 1 42
- Démonstration du théorème 1 44
- Rappel T. L. 1 45

../..

Lemme 1 45
Rappel T. L. 2 45
Lemme K (lemme de Kenig) 46
Lemme 2 47
Théorème K (théorème de Kenig) 47
Lemme 3 50

Annexe à la deuxième partie 52

A1. Démonstration du lemme 3 52
A2. Application du théorème 1 à l'étude de deux multiplicateurs sur $\mathbb{R}^n$ 53

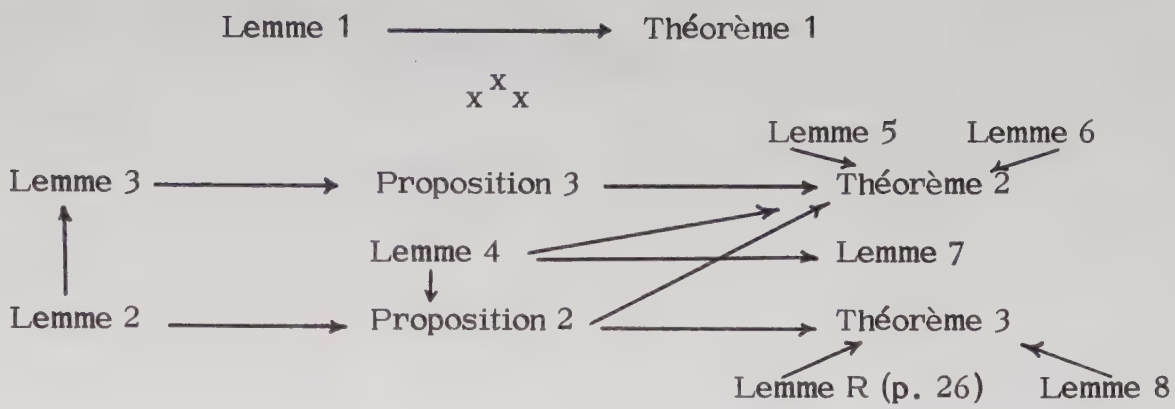
Théorème 2 : Généralisation partielle du théorème 1 53

Conclusion 58

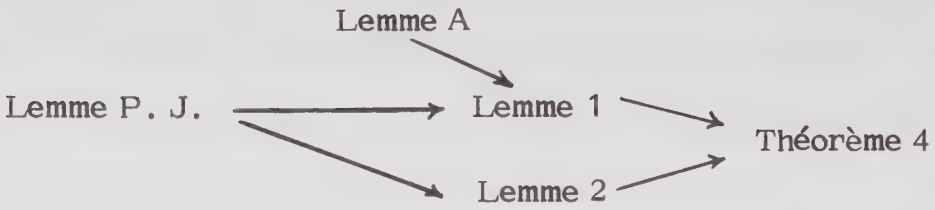
Bibliographie 59

Graphe

Première partie



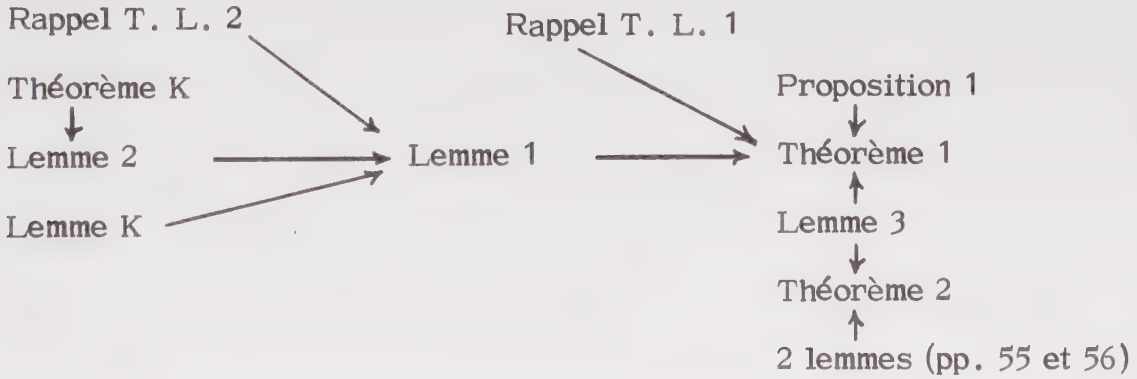
x x x



Tous ces lemmes sont énoncés page 32.

x x x

Deuxième partie



Première partie

CHEMINS DANS $\mathcal{G}$.

Une conséquence du théorème de Peter Jones est que l'ensemble $\Omega = \{\log h' \ , \ h \in \mathcal{G}\}$ est un ouvert de BMO($\mathbb{R}$), ce dernier étant muni de sa topologie d'espace de Banach. Munir $\mathcal{G}$ de la topologie induite par la correspondance qui à h associe $\log h'$ présente à première vue deux inconvénients ; en effet, muni de cette topologie, $\mathcal{G}$ n'est ni un espace séparé, ni un groupe topologique. Nous pouvons toutefois adopter la terminologie suivante : nous dirons que les applications h_t $(t \in [0,1])$ forment un chemin continu (resp. dérivable) de $\mathcal{G}$ si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

K_1 : L'application définie de $[0,1]$ dans BMO qui à t associe $\log(h_t)'$ est continue (resp. dérivable).

K_2 : Pour tout x de $\mathbb{R}$, l'application définie de $[0,1]$, dans $\mathbb{R}$, qui à t associe $h_t(x)$ est continue (resp. dérivable) ; de plus $h_o(x) = x + h_o(0)$.

La proposition suivante, que nous démontrerons en annexe, justifie cette terminologie :

PROPOSITION 1. Soit U une application continue (resp. dérivable) définie de $[0,1]$ dans Ω. Il existe des applications h_t $(t \in [0,1])$ formant un chemin continu (resp. dérivable) de $\mathcal{G}$ et vérifiant :

$$\forall\, t \in [0,1] : \log(h_t)' = U(t).$$

Trois remarques : a) Cette proposition admet une version locale en t.

b) On ne peut pas avoir d'énoncé identique en remplaçant la continuité de U par une propriété quantitative. Un chemin lipschitzien dans $\mathcal{G}$ sera donc un chemin continu h_t tel que $\log(h_t)'$ soit lipschitzien dans BMO. De même, un chemin dérivable à dérivée bornée dans $\mathcal{G}$ sera un chemin dérivable h_t tel que $\log(h_t)'$ soit dérivable à dérivée bornée dans BMO.

c) Si deux chemins continus, (resp. dérivables) h_t et k_t $(t \in [0,1])$ sont tels que, pour tout $t \in [0,1]$, $\log(h_t)' = \log(k_t)'$, alors il existe deux fonctions continues (resp. dérivables) $a(t)$ et $b(t)$ définies de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}$ respectivement, et telles que

$$\forall\, t \in [0,1] \qquad h_t = a(t)\, k_t + b(t).$$

Nous allons ici étudier deux propriétés caractéristiques des chemins de $\mathcal{G}$ dérivables à dérivée bornée. Plus précisément nous avons le théorème suivant :

THEOREME 1. Soient h_t des éléments de $\mathcal{H}_o$ $(t \in [0,1])$. Les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) Les h_t forment un chemin de $\mathcal{G}$, dérivable et à dérivée bornée.

(ii) La fonction qui à t associe $U_{h_t} H U_{h_t}^{-1}$ est une fonction de $[0,1]$ dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ dérivable et à dérivée bornée, et les h_t vérifient K_2.

(iii) Il existe une constante positive C et une fonction G définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ telles que :

$\alpha)$ $\forall\, t \in [0,1]$, $\exists\, b_t \in \mathrm{BMO} / \|b_t\|_* < C$ et $G_x'(t,.) = b_t$ (au sens des distributions)

$\beta)$ $\forall\, (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,1]$, $\frac{d}{dt} h_t(x) = G(t\ ,\ h_t(x))$ et $h_o(x) = x$.

Notons que la remarque c) qui suit la proposition 1 nous montre que, ainsi que les propriétés (i) et (ii), la propriété (iii) est invariante lorsqu'on remplace $\{h_t\}$ par un autre chemin $\{k_t\}$ vérifiant pour tout t : $\log(h_t)' = \log(k_t)'$.

Nous connaissons déjà plusieurs résultats allant dans le sens du théorème 1 :

a) Guy David a montré dans [5], le théorème suivant, également démontré dans [6], qui est l'analogue de (ii) $\Rightarrow$ (i) lorsque l'hypothèse de dérivabilité bornée est remplacée par une condition de continuité :

THEOREME G. D. $\exists\, C > 0$, $\exists\, \gamma_o > 0$ <u>telles que si</u>
$h \in \mathcal{H}_o$ <u>et</u> $\|U_h H U_{h^{-1}} - H\| < \gamma_o$, <u>alors</u> :
$h \in \mathcal{G}$ <u>et</u> $\|\log h'\|_* \leq C \|U_h H U_{h^{-1}} - H\|$.

b) En reprenant à nouveau [3] et plus particulièrement la démonstration de la proposition 1, on voit que l'implication (iii) $\Rightarrow$ (ii) y est déjà contenue.

c) Enfin l'analyticité de $U_h H U_{h^{-1}}$ en fonction de $\log h'$, explicitée dans [3], nous permettrait de démontrer directement (i $\Rightarrow$ ii). En fait c'est inutile car nous allons démontrer (ii $\Rightarrow$ i) et (i $\Rightarrow$ iii).

<u>Démonstration de</u> (ii $\Rightarrow$ i).

Une conséquence de l'analyticité de $U_h H U_{h^{-1}}$ en fonction de $\log h'$ est l'existence d'un opèrateur linéaire continu $T_1 : BMO \longrightarrow \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ vérifiant :
$\exists\, C > 0$, $\exists\, \delta > 0$ tels que, si $h \in \mathcal{G}$ et $\|\log h'\|_* < \delta$, alors :

$$\|U_h H U_{h^{-1}} - H - T_1(\log h')\| \leq C \|\log h'\|_*^2 . \qquad (I)$$

Il est maintenant très facile de déduire de (I) et du théorème de G. D. que :

$$\exists\, C > 0 \,/\, \forall\, u \in BMO : \quad \|u\|_* \leq C \|T_1(u)\| \qquad (II).$$

L'hypothèse (ii) s'écrit :

$$\exists C' > 0 \,/\, \forall\, t_o \in [0,1] : \exists\, A_{t_o} \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R})) \text{ tel que :}$$

$$\|A_{t_o}\| \leq C' \quad \text{et} \quad \lim_{t \to t_o} \left\| \frac{U_{h_t \circ h_{t_o}^{-1}} H U^{-1}_{h_t \circ h_{t_o}^{-1}} - H}{t - t_o} - A_{t_o} \right\| = 0.$$

On en déduit, grâce au théorème G. D., que :

$$\left\|\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'\right\|_* = \left\|\log(h_t)' \circ h_{t_o}^{-1} - \log(h_{t_o})' \circ h_{t_o}^{-1}\right\|_*$$

$$\leq C\,|t-t_o| \quad \text{dès que} \quad |t-t_o| < \varepsilon(t_o).$$

En utilisant (I), on obtient :

$$\lim_{t\to t_o} \left\| \frac{U_{h_t \circ h_{t_o}^{-1}} H U^{-1}_{h_t \circ h_{t_o}^{-1}} - H}{t - t_o} - T_1\left(\frac{\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'}{t - t_o}\right)\right\| = 0$$

d'où :

$$\lim_{t\to t_o} T_1\left(\frac{\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'}{t - t_o}\right) = A_{t_o}.$$

De plus (II) entraîne l'existence de $T_1^{-1}(A_{t_o})$ et que :

$$\lim_{t\to t_o} \frac{\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'}{t - t_o} = T_1^{-1}(A_{t_o})$$

soit :

$$\frac{d}{dt}\,(\log h_t')_{t=t_o} = V_{h_{t_o}}\left[T_1^{-1}(A_{t_o})\right].$$

Il reste à montrer que la norme d'opérateur de V_{h_t}, considéré comme opérateur de BMO, est uniformément bornée. A cet effet nous utiliserons la forme affaiblie suivante de (ii).

$$\exists\, C' > 0 / \forall\, (t,t_o) \in [0,1]^2 \quad \left\|U_{h_t} H U^{-1}_{h_t} - U_{h_{t_o}} H U^{-1}_{h_{t_o}}\right\| \leq C'\,|t-t_o|.$$

En utilisant le théorème G. D., on en déduit que :

$$\exists\, \gamma > 0,\ \exists\, C > 0 / \ |t-t_o| < \gamma \Rightarrow \left\|\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'\right\| \leq C$$

ou encore

$$\exists\, \gamma_1 > 0,\ \exists\, C_1 > 0 / \ |t-t_o| < \gamma_1 \Rightarrow \left\|V^{-1}_{h_{t_o}} V_{h_t}\right\| < C_1$$

$$\text{soit} \qquad |t-t_o| < \gamma_1 \Rightarrow \left\|V_{h_t}\right\| \leq C_1 \left\|V_{h_{t_o}}\right\|.$$

On en conclut que : $\forall\, t \in [0,1] \quad \|V_{h_t}\| \leq C_1^{1+1/\gamma_1}$. Ceci termine la démonstration du (ii $\Longrightarrow$ i).

Démonstration de (i $\Longrightarrow$ iii).

La propriété K_2 nous donne l'existence d'une fonction $J : [0,1] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant

$$\forall\ (t,x) \in [0,1] \times \mathbb{R} \qquad \frac{d}{dt}\, h_t(x) = J(t,x).$$

La fonction G, si elle existe, vérifie donc :

$$G(t,\, h_t(x)) = J(t,x) \quad \text{soit,} \quad G(t,x) = J(t, h_t^{-1}(x)).$$

En se reportant à la définition de BMO, on peut voir que, pour montrer que G_t a pour dérivée au sens des distributions une fonction de BMO, il suffit de montrer que G_t est absolument continue et que la variation totale sur $[a,b]$ de $x \to \left(G_t(x) - \frac{G(t,b) - G(t,a)}{b-a}\, x\right)$ est uniformément majorée par une expression du type : $C\,|b-a|$.

Nous aurons ces résultats comme conséquences du lemme suivant :

LEMME 1. $\exists\, \gamma > 0 \quad \exists\, \delta > 0, \quad \exists\, K > 0$ tels que

$\forall\, h \in \mathcal{G} \,/\, \|\log h'\|_* < \gamma$

$\forall$ E mesurable de $\mathbb{R}$, inclus dans I, intervalle de $\mathbb{R}$,

$$\left| \frac{|h(E)|}{|h(I)|} - \frac{|E|}{|I|} \right| \leq K \|\log h'\|_* \left(\frac{|E|}{|I|}\right)^{\delta}.$$

En effet, appliquons ce lemme à l'ensemble E suivant : soient $a \leq x_o \leq y_o < x_1 \leq y_1 \ldots < x_n \leq y_n \leq b$ et soit $E = \bigcup_{i=0}^{n}]h_{t_o}(x_i)\,,\, h_{t_o}(y_i)[$ et $I =]h_{t_o}(a)\,,\, h_{t_o}(b)[$.

Soit enfin $t \,/\, |t-t_o| < \gamma\, M^{-1}$ où M est défini par :

$$M = \sup_{t,t_o} \frac{\|\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'\|_*}{|t - t_o|}.$$

(L'existence de M résulte de (i) et du fait presque évident que $\|V_{h_t}\|$ est borné uniformément sur tout chemin continu).

Prenons $h = h_t \circ h_{t_o}^{-1}$; le lemme donne :

$$\left| \frac{\Sigma(h_t(y_i) - h_t(x_i))}{h_t(b) - h_t(a)} - \frac{\Sigma(h_{t_o}(y_i) - h_{t_o}(x_i))}{h_{t_o}(b) - h_{t_o}(a)} \right|$$

$$\leq K M |t-t_o| . \left[\frac{\Sigma(h_{t_o}(y_i) - h_{t_o}(x_i))}{h_{t_o}(b) - h_{t_o}(a)} \right]^{\delta} .$$

Divisons les deux membres de cette inégalité par $|t-t_o|$ et faisons le tendre vers

nous obtenons :

$$\left| \frac{\Sigma\left[G(t_o, h_{t_o}(y_i)) - G(t_o, h_{t_o}(x_i))\right]}{h_{t_o}(b) - h_{t_o}(a)} - \frac{(\Sigma\left[h_{t_o}(y_i) - h_{t_o}(x_i)\right])\left[G(t_o, h_{t_o}(a)) - G(t_o, h_{t_o}(b))\right]}{(h_{t_o}(b) - h_{t_o}(a))^2} \right|$$

$$\leq K M \left[\frac{\Sigma(h_{t_o}(y_i) - h_{t_o}(x_i))}{h_{t_o}(b) - h_{t_o}(a)} \right]^{\delta}$$

d'où pour toute suite $a \leq x_o \leq y_o < x_1 \leq y_1 \ldots\ldots \leq b$,

$$\left| \frac{\Sigma\left[G(t_o, y_i) - G(t_o, x_i)\right]}{b-a} - \frac{\left[\Sigma(y_i - x_i)\right](G_{t_o}(b) - G_{t_o}(a))}{(b-a)^2} \right|$$

$$\leq K M \left[\frac{\Sigma(y_i - x_i)}{b-a} \right]^{\delta} .$$

Cette inégalité entraîne simultanément l'absolue continuité de $G(t_o, .)$ et le fait que :

$$\forall\, t_o \in [0,1] : \left\| \frac{d}{dx} G(t_o, .) \right\|_* \leq 2 K M.$$

Pour achever la démonstration du théorème 1, il nous reste donc à montrer le lemme 1.

Démonstration du lemme 1.

Nous utiliserons ici aussi un argument de perturbation en considérant dans

le chemin déjà utilisé par Coifman et Meyer dans [3], i. e. $\{h_t , t\in[0,1]\}$ avec : $\forall\, x\in\mathbb{R},\ \forall\, t\in[0,1] :\ h_t(x) = h(0) + \int_0^x [h'(u)]^t\, du.$

Pour tout ensemble mesurable E borné nous avons :

$$|h_t(E)| = \int_E [h'(u)]^t\, dt.$$

Il est facile de voir que l'on peut dériver cette intégrale sous le signe $\int$, par rapport à t ; appelons $\log h' : b$.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{|h_t(E)|}{|h_t(I)|}\right) = \frac{|h_t(I)|\int_E t\, b(u)(h_t)'(u)du - |h_t(E)|\int_I t\, b(u)(h_t)'(u)\, du}{|h_t(I)|^2}$$

$$= \frac{t}{|h_t(I)|}\int_{h_t(E)} (b\circ h_t^{-1} - m_{h_t(I)}\, b\circ h_t^{-1})\, du .$$

Choisissons maintenant γ' de façon à assurer l'existence d'une constante C telle que :

$$\|\log h'\|_* \le \gamma' \Longrightarrow \sup(\|V_h\|, \|V_h - 1\|) \le C \quad ;\quad \text{on supposera } \gamma \le \gamma'.$$

On va utiliser maintenant simultanément l'hypothèse $\|V_{h_t}\| \le C$ et l'inégalité suivante, qui peut se déduire de l'inégalité de John-Nirenberg citée p. 29.

$\exists A$ constante absolue telle que, $\forall\, E \subset I$, $\forall\, f \in BMO$:

$$\frac{1}{|I|}\int_E |f - m_I f| \le A \times \frac{|E|}{|I|}\left[1 + \left|\log \frac{|E|}{|I|}\right|\right]\|f\|_* .$$

En remplaçant E et I par $h_t(E)$, $h_t(I)$ et f par $b\circ h_t^{-1}$, on obtient :

$$\left|\frac{d}{dt}\frac{|h_t(E)|}{|h_t(I)|}\right| \le t.A\,\frac{|h_t(E)|}{|h_t(I)|}\left[1 + \left|\log \frac{|h_t(E)|}{|h_t(I)|}\right|\right] \times \|b\|_* \ .\ C .$$

Posons $u(t) = \dfrac{|h_t(E)|}{|h_t(I)|}$; $\log u$ est négatif.

$$\frac{u'}{u\,[1 - \operatorname{Log} u]} \le t\, A\, C \|b\|_*$$

$$\Longrightarrow \log[1 - \log u(1)] - \log[1 - \log u(0)] \le \frac{CA}{2}\|b\|_* .$$

Notons $\alpha = \exp - \frac{CA}{2}\|b\|_*$. On a alors : $\frac{u(1)}{e} \leq \left(\frac{u(0)}{e}\right)^{\alpha}$.

Notons également $K_\alpha = \sup_{x \in]0,1[} \frac{x^{\alpha/2}}{e^{\alpha}} . (1 + |\log x|)$.

On utilise l'inégalité $x^{\alpha} - x \leq (1-\alpha)|\log x|\, x^{\alpha}$, valable dès que $\alpha \leq 1$ et $x \in]0,1]$. On obtient :

$$u(1) - u(0) \leq e \frac{CA}{2}\|b\|_* \left[1 + |\log u(0)|\right] \left[\frac{u(0)}{e}\right]^{\alpha}$$

$$\leq e \frac{CA}{2}\|b\|_* \times K_\alpha \left[u(0)\right]^{\alpha/2}$$

$$\leq K'_\alpha \|b\|_* \left[u(0)\right]^{\alpha/2}.$$

Soit :

$$\frac{|h(E)|}{|h(I)|} \leq \frac{|E|}{|I|} + K'_o\|b\|_* \left(\frac{|E|}{|I|}\right)^{\alpha/2} \qquad (1).$$

On suppose maintenant $\gamma \leq \frac{1}{K'_o}$ et $\gamma \leq \frac{\gamma'}{C}$ de sorte que si $\|\log h'\|_* < \gamma$, $\|\log(h^{-1})'\|_* < \gamma'$ et

$$\frac{|h(E)|}{|h(I)|} \leq 2\left(\frac{|E|}{|I|}\right)^{\alpha/2}.$$

On peut alors appliquer l'inégalité (1) en remplaçant h par h^{-1}, ce qui donne :

$$\frac{|E|}{|I|} \leq \frac{|h(E)|}{|h(I)|} + K'_o\|b\|_* \times C \left(\frac{|h(E)|}{|h(I)|}\right)^{\frac{\alpha^C}{2}}.$$

D'où

$$\left|\frac{|h(E)|}{|h(I)|} - \frac{|E|}{|I|}\right| \leq K'_o\, C\|b\|_* \times 2^{\frac{\alpha^C}{2}} \left[\frac{|E|}{|I|}\right]^{\frac{\alpha^{C+1}}{4}}.$$

Le lemme 1 est donc démontré car α est contrôlé par γ'. Ceci achève la démonstration du théorème 1. On peut faire deux remarques à son sujet.

a) La première remarque, de détail, concerne la notion de chemin dérivable à dérivée bornée. Il eut été plus pratique de supposer que $\left\|\frac{d}{dt}\left[\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'\right]_{t=t_o}\right\| < C_1$ plutôt que $\left\|\frac{d}{dt}(\log h_t)'_{t=t_o}\right\| < C_2$. En effet la première condition entraîne automatiquement que h_t est un chemin continu dans $\mathcal{G}$, alors qu'il faut faire cette hypothèse supplémentaire a priori si l'on suppose remplie la seconde condition. De même C_2

ne permet pas de contrôler C_1 alors que C_1 permet de contrôler C_2 et les constantes reliées à (ii) et (iii).

b) La seconde remarque concerne l'implication (iii) $\Rightarrow$ (i). Il semble en effet assez détourné de passer par (ii) et d'utiliser, entre autres, le théorème de Calderon, pour obtenir un résultat relativement simple sur des équations différentielles. La démonstration du théorème 2 confirmera que ce détour n'est pas nécessaire. On verra également plus loin comment on peut relier les chemins dérivables à dérivée bornée, aux chemins tels que $V_{h_t} \mathcal{H} V_{h_t^{-1}}$ soit dérivable à dérivée bornée dans $\mathcal{L}(BMO, BMO)$. En particulier, on démontrera un analogue du théorème de G. D. dans le cas de BMO, ce qui s'avèrera beaucoup plus simple.

Le théorème 1 laisse en suspens une question tout à fait naturelle : quelles fonctions G obtient-on dans (iii) lorsque $\{h_t , t \in [0,1]\}$ décrit l'ensemble des chemins dans $\mathcal{G}$ dérivables à dérivée bornée ? Le théorème 2 nous dit qu'il suffit de faire, en plus de l'hypothèse (iii) α), une hypothèse de continuité partielle par rapport à t. Celle-ci entraînera d'ailleurs la continuité de G par rapport au couple, compte-tenu de (iii) α) (cf. théorème 1 et proposition 3).

THEOREME 2. Soit G une fonction définie sur $[0,1] \times \mathbb{R}$ vérifiant les deux hypothèses suivantes :

H_1 : $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\quad G(.,x)$ est continue

H_2 : $\exists\, C > 0 \,/\, \forall\, t \in [0,1]$: $\exists\, b_t \,/ \|b_t\|_* < C$ et $G(t,.)$ est une primitive de b_t.

Alors l'équation (E) : $(y'(t) = G(t, y(t))\ ,\ y(0) = x)$ admet pour tout x une solution unique sur $[0,1]$ notée $y(x,t)$. De plus, pour tout $t \in [0,1]$, $y(.,t) \in \mathcal{G}$.

L'aspect qualitatif de ce théorème, qui est d'abord un théorème d'existence et d'unicité de solution d'équations différentielles, apparaît comme une généralisation du théorème de Cauchy-Lipschitz. On donnera d'ailleurs une démonstration où $\mathbb{R}$ sera remplacé par $\mathbb{R}^n$, de manière à préparer la réciproque au théorème d'Ahlfors évoquée

dans l'introduction.

Son aspect quantitatif, que constitue la dernière assertion, est déjà contenu dans le théorème 1. Pour des raisons déjà exposées, nous en donnons ici une nouvelle démonstration beaucoup plus directe, reposant sur des estimations a priori, dont nous allons maintenant exposer le principe.

Supposons que l'on ait montré l'existence d'une solution $y(x,t)$ telle que pour tout t, $y(.,t)$ soit dans $\mathcal{G}$. Appelons T la correspondance de Ω dans IS(BM qui à $\log h'$ associe V_h. T n'est pas une application, ce qui n'est pas génant. On a, en faisant les hypothèses de régularité nécessaires,

$$\frac{d}{dt}\, h_t(x) = G(t\ ,\ h_t(x))$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\,\frac{d}{dx}\, h_t(x) = G'_x(t\ ,\ h_t(x))\ \ h'_t(x)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{d}{dt}\log h'_t = b_t(h_t(x))$$

$$\Longrightarrow \quad \left\|\frac{d}{dt}\log h'_t\right\|_* \leq C \left\|T\left[\log h'_t\right]\right\|_{BMO,BMO} \qquad (1).$$

Si $\sup_{t\in[0,1]} \|T[\log h'_t]\| < +\infty$, on utilise le fait que $\exists\ \gamma > 0$, $\exists\ K > 0$ / $\|\log h'\|_* \leq \gamma \Longrightarrow \|T[\log h']\| \leq K$, et on obtient grâce à (1), l'existence d'un réel τ tel que

$$0 \leq t < \tau \Longrightarrow \|T[\log h'_t]\| \leq K. \qquad (2)$$

Soit maintenant τ_o le sup des τ vérifiant (2). Si $\tau_o < +\infty$

$$\gamma \leq \int_o^{\tau_o} \left\|\frac{d}{dt}\log h'_t\right\|_* \leq K\, C\, \tau_o$$

$$\text{d'où} \qquad \tau_o \geq \frac{\gamma}{KC}.$$

Par composition des h_t, on voit l'existence d'une constante $f(C)$ telle que :

$$\sup_{t\in[0,1]} \|T[\log h'_t]\| \leq f(C).$$

Il reste évidemment de nombreux détails techniques à régler. La plupart le seront au

cours de la résolution du problème de l'existence et l'unicité des solutions de l'équation (E). Nous allons donc démontrer les deux propositions suivantes.

PROPOSITION 2. Soit G une application continue définie de $[0,1]\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ et G_i ses coordonnées. On suppose que pour tout $i \in [1,n]$ G_i vérifie l'hypothèse (L) : i. e. :

$\exists C > 0 \ / \ \forall t \in [0,1]$, $\exists\, b_{it}$ forme différentielle à coefficients dans BMO telle que :

a) $\|b_t\|_* < C$

b) $G_i(t,.)$ est une primitive de b_{it}.

Alors l'équation (E) : $(y'(t) = G(t,y(t)),\quad y(0) = x)$ admet, pour tout x dans $\mathbb{R}^n$, sur $[0,1]$ une solution unique notée $y(t,x)$ et pour tout $t \in [0,1]$, $y(t,.)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}^n$.

PROPOSITION 3. Soit G une application définie de $[0,1]\times\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et notée $G(t,x)$. Si elle est continue par rapport à t, et vérifie l'hypothèse (L), elle est continue.

Ensemble ces deux propositions impliquent la partie qualitative du théorème 2. La proposition 3, qui montre que les hypothèses du théorème 2 et de la proposition 2 coïncident en dimension 1, présente surtout l'intérêt que sa démonstration prépare celle de la proposition 2, en partie du moins.

Nous devons introduire quelques notations de façon à alléger l'écriture de la démonstration qui va suivre.

Soit $x\in\mathbb{R}^n$ et $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

a) $B(x,\alpha)$ (resp. $S(x,\alpha)$) désigne la boule ouverte (resp. sphère) de $\mathbb{R}^n$ de centre x et de rayon α.

b) $|B(x,\alpha)|$ (resp. $|S(x,\alpha)|$) désigne le volume (resp. la surface) de $B(x,\alpha)$ (resp. $S(x,\alpha)$), calculés par rapport à la mesure de Lebesgue.

c) $f^{(\alpha)}(x)$ (resp. $f^{*(\alpha)}(x)$) désigne la moyenne de f sur $B(x,\alpha)$ (resp. $S(x,\alpha)$), également calculées par rapport à la mesure de Lebesgue.

La propriété d'invariance par translation de BMO implique que l'opérateur T_α (resp. T^*_α) défini par $T_\alpha(f) = f^{(\alpha)}$ (resp. $T^*_\alpha(f) = f^{*(\alpha)}$) est continu sur BMO avec une norme égale à 1 (si l'on prend sur BMO la norme quadratique).

On peut tirer parti de cette remarque pour approximer des primitives de fonctions de BMO quelconques par des primitives de fonctions de BMO continues, et même un peu plus. Plus précisément nous avons le lemme suivant :

LEMME 2. $\exists C_n > 0$ telle que si F définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une primitive d'une forme différentielle à coefficients dans BMO on ait :

$$\forall\ \alpha \in \mathbb{R}_+^*\ ,\ \left\|F^{(\alpha)} - F\right\|_\infty \leq C_n\, \alpha \|f\|_* \quad .$$

Remarquons qu'il suffit de démontrer ce lemme en remplaçant $F^{(\alpha)}$ par $F^{*(\alpha)}$ et que pour tout x la continuité de F implique :

$$\lim_{p\to+\infty} F^{*(\alpha 2^{-p})}(x) = F(x).$$

Démonstration du lemme 2.

Démontrons l'existence de $C'_n > 0$ telle que, pour tout $\alpha > 0$, on ait

$$\left\|F^{*(\alpha)} - F^{*(\frac{\alpha}{2})}\right\|_\infty \leq C'_n\, \alpha \|f\|_* \quad . \tag{1}$$

On conclura alors en utilisant les deux remarques précédentes comme suit :

$$\left\|F^{*(\alpha)} - F\right\|_\infty \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \left\|F^{*(\alpha 2^{-p})} - F^{*(\alpha 2^{-p-1})}\right\|_\infty$$

$$\leq \sum_{p=0}^{+\infty} C'_n\, \alpha\, 2^{-p} \|f\|_* \quad \leq 2\, C'_n\, \alpha \|f\|_* \ .$$

Pour démontrer (1) fixons x et α et notons $X = F^{*(\alpha)}(x) - F^{*(\frac{\alpha}{2})}(x)$.

$S(0,1)$ désigne également la sphère de $\mathbb{R}^n$ considéré comme espace vectoriel

$$X = \frac{1}{|S(0,1)|} \int_{\vec{u} \in S(0,1)} \left[F(x + \alpha\vec{u}) - F(x + \frac{\alpha}{2}\vec{u}) \right] dS$$

$$= \frac{1}{|S(0,1)|} \int_{\vec{u} \in S(0,1)} \left[\int_{\alpha/2}^{\alpha} f(x+\beta\vec{u}).\vec{u}\, d\beta \right] dS \ .$$

Faisons le changement de variable suivant :

$$z = x + \beta\vec{u} \quad ; \quad dz = \beta^{n-1}\, d\beta\, dz \quad ; \quad \beta = \|z - x\| = \|\overrightarrow{xz}\|$$

$$X = \frac{1}{|S(0,1)|} \int_{B(x,\alpha)-B(x,\frac{\alpha}{2})} f(z).\ \frac{z-x}{\|z-x\|} \times \frac{1}{\|z-x\|^{n-1}}\, dz \ .$$

X étant nul si f est constante, on peut retrancher $f^{(\alpha)}(x)$ à $f(z)$ sous l'intégrale

$$X = \frac{\alpha^{n-1}}{|S(0,\alpha)|} \int_{B(x,\alpha)-B(x,\frac{\alpha}{2})} (f(z) - f^{(\alpha)}(x)).\ \frac{z-x}{\|z-x\|} \times \frac{dz}{\|z-x\|^{n-1}} \ .$$

Or, pour $z \in B(x,\alpha) - B(x, \frac{\alpha}{2})$, $\frac{\alpha}{\|z-x\|} \leq 2$.

$$|X| \leq \frac{2^{n-1}}{|S(0,\alpha)|} \int_{B(x,\alpha)} \|f(z) - f^{(\alpha)}(x)\|\, dz$$

$$\leq \frac{2^{n-1}}{|S(0,\alpha)|} \cdot (|B(x,\alpha)|\, \|f\|_*) \leq \frac{2^{n-1}}{n} . \|f\|_* .$$

Le lemme 2 est démontré.

Démonstration de la proposition 3.

Soit G une application satisfaisant aux hypothèses de la proposition 3. On notera G_t la fonction $G(t,.)$. On aura évidemment le résultat si l'on montre que les fonctions G_t ($t \in [0,1]$) sont équicontinues. Le lemme suivant va nous permettre de conclure. Nous le démontrerons ensuite.

LEMME 3. $\exists\, C_n > 0$ telle que, si F définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ est une primitive d'une forme différentielle f à coefficients dans BMO, on ait :

$\forall \ \vec{u} \in \vec{\mathbb{R}^n} / \|\vec{u}\| = 1$, si $\xi \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\overrightarrow{O\xi} = \vec{u}$, alors :

(1) $$|F(0) - F(\xi) + f^{(1)}(O).\vec{u}| \leq C_n \|f\|_* .$$

Appliquons ce lemme aux fonctions $G_t(\varepsilon(x-x_o))$ où x_o est fixé dans $\mathbb{R}^n$ et ε arbitrairement petit. C désigne la constante de l'hypothèse (L). On déduit de (1) :

$$|x-x_o| = \varepsilon \Longrightarrow |G_t(x) - G_t(x_o)| \leq C_n C \varepsilon + \varepsilon \sup_t |b_t^{(\varepsilon)}(x_o)| .$$

On peut majorer $|b_t^{(\varepsilon)}(x_o)|$ par $|b_t^{(1)}(x_o)| + CC'_n |\log \varepsilon|$, en utilisant l'inégalité citée lors de la démonstration du lemme 1.

Le fait que $|b_t^{(1)}(x_o)|$ soit uniformément borné en t est également une conséquence de l'inégalité (1). Il suffit en effet d'appliquer cette dernière à n vecteurs indépendants et d'utiliser le fait que pour tout x, $G(.,x)$ est bornée sur $[0,1]$.

Finalement,

$$|x-x_o| = \varepsilon \Rightarrow |G_t(x) - G_t(x_o)| \leq C_n C \varepsilon + CC'_n \varepsilon |\log \varepsilon| + \varepsilon M_{x_o} .$$

Modulo le lemme 3, la proposition 3 est démontrée.

Démonstration du lemme 3.

Le lemme 2 de la page 12 nous donne :

$$\sup(|F(0) - F^{(1)}(0)|, |F(\xi) - F^{(1)}(\xi)|) \leq C_n \|f\|_* .$$

Il suffit donc de montrer que

$$|F^{(1)}(0) - F^{(1)}(\xi) + f^{(1)}(0).\vec{u}| \leq C_n \|f\|_*$$

$$F^{(1)}(0) - F^{(1)}(\xi) = \frac{1}{|B(0,1)|} \int_{y \in B(0,1)} [F(y) - F(y+\vec{u})]\, dy$$

$$= \frac{-1}{|B(0,1)|} \int_{y \in B(0,1)} \left(\int_0^1 f(y+\beta\vec{u}).\vec{u}\, d\beta \right) dy .$$

$|f|^{(1)}(0 + \beta\vec{u})$ étant uniformément borné en β, on peut inverser l'ordre des intégrations, d'où :

$$F^{(1)}(0) - F^{(1)}(\xi) = -\int_0^1 f^{(1)}(0 + \beta\vec{u}).\vec{u}\, d\beta$$

$$\Longrightarrow \left| F^{(1)}(0) - F^{(1)}(\xi) + f^{(1)}(0).\vec{u} \right| \leq \int_0^1 \left| f^{(1)}(0) - f^{(1)}(0+\beta\vec{u}) \right| d\beta$$

$$\leq C_n \|f\|_* \quad .$$

La proposition 3 est maintenant complètement démontrée.

Démonstration de la proposition 2.

Cette démonstration, plus longue, comportera trois étapes. Dans la première, on montrera l'existence de solutions définies sur $[0,1]$ tout entier, ce qui est une conséquence des propriétés de croissance à l'infini des fonctions de BMO. Dans la seconde, on montrera leur unicité en les approchant localement par des solutions d'équations à coefficients localement lipschitziens. Cette méthode, qui n'est pas la plus simple, a surtout l'avantage de préparer la démonstration de l'inégalité a priori : $\sup_{t\in[0,1]} \|T[\log h'_t]\| < +\infty$. La troisième étape consistera à montrer que les fonctions h_{st}, $(s,t) \in [0,1]^2$ définies par

$$x = y(x_o\ ,\ s) \Longrightarrow h_{st}(x) = y(x_o\ ,\ t)\ ,$$

sont des homéomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

1ère étape. Existence de solutions définies sur $[0,1]$.

Une conséquence de l'hypothèse (L) et de la continuité de G est, ainsi qu'on le voit en lisant la démonstration de la proposition 3, l'existence d'une constante K telle que : $\forall\, t \in [0,1]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}^n$; soit $|x| = \|\overrightarrow{0x}\|$ alors :

$$G_t(x) \leq K\left[1 + |x| + |x|\,|\log|x||\right] . \qquad (2)$$

Appelons a la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par :

$$a(x) = 1 + x + x\,|\log x|\,.$$

L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x+x|\log x|}$ étant divergente à l'infini et convergente en 0, la primitive de $\frac{1}{a}$ qui est nulle en 0 définit une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur

lui-même, notée A.

Soit $(t_o , y_o) \in [0,1] \times \mathbb{R}^n$ et $E(t_o , y_o)$ l'équation

$$y'(t) = G(t, y(t)) \quad , \quad y(t_o) = y_o .$$

Cette équation a une solution définie au voisinage de t_o. Appelons la y. Soit $]\alpha, \beta[$ un intervalle où y est définie et ne s'annule pas ; $|y|$ est alors différentiable entre α et β. Si t_1 et t_2 sont tels que $\alpha < t_1 < t_2 < \beta$, alors

$$\forall\, t \in [t_1, t_2], \qquad ||y|'| \leq K\, a(|y|)$$

$$\Longrightarrow -K \leq \frac{|y|'}{a(|y|)} \leq K$$

$$\Longrightarrow |A(|y(t_1)|) - A(|y(t_2)|)| \leq K\,|t_1 - t_2| \leq K$$

$$\Longrightarrow |y(t_2)| \leq A^{-1}\left[K + A(|y(t_1)|)\right].$$

Que y s'annule ou non, on peut toujours écrire sur un intervalle $]\gamma , \delta[$ où elle est définie

$$|y(t)| \leq A^{-1}\left[K + A(|y_o|)\right]. \qquad (3)$$

$G(t , y(t))$ reste donc borné sur cet intervalle ; l'équation $y'(t) = G(t , y(t))$ montre enfin que $y(t)$ est à variation bornée, et a des limites en γ et δ, ainsi donc que y'. La solution peut donc se prolonger hors de $]\gamma , \delta[$ tant que $[\gamma, \delta] \neq [0,1]$. Ceci termine la 1ère étape.

2ème étape. Unicité des solutions définies sur $[0,1]$.

Comme nous l'avons dit, nous allons utiliser une méthode d'approximation. Nous allons pour cela utiliser le lemme 2 de la page 12 et définir $G^{(\alpha)}$ sur $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ par :

$$G^{(\alpha)}(t , .) = (G_t)^{(\alpha)}.$$

On supposera en outre que $\alpha < 1$ de façon à pouvoir choisir K dans la première étape tel que l'inégalité (2) reste valable en remplaçant G_t par $(G_t)^{(\alpha)}$.

Donnons quelques propriétés utiles des $G^{(\alpha)}$, $\alpha \in [0,1]$, qui se déduisent très facilement de la continuité de C, du lemme 2 et du lemme 3. Nous ne les démontrerons pas.

(j) $\|G - G^{(\alpha)}\|_\infty \leq \alpha C \times C'_n$.

(jj) Pour tout $t \in [0,1]$ $G_t^{(\alpha)}$ est continûment différentiable : $D_x G^{(\alpha)}(t\ ,\ .) = b_t^{(\alpha)}$ avec $\|b_t^{(\alpha)}\|_* < C$.

(jjj) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ $G^{(\alpha)}(.\ ,\ x)$ est continu par rapport à t.

Une dernière propriété s'obtient en utilisant (jj) et l'inégalité valable pour toute fonction de BMO :

$$\exists C_n > 0 / |b_t^{(\alpha)}(x)| \leq C_n \left[b_t^{(1)}(0) + \|b\|_* (|\log \alpha| + \log(|x| + 1)) \right].$$

(jv) $\exists M > 0 \ / \ \forall (x,y) \in (\mathbb{R}^n)^2$, soit $|y-x| = \|\overrightarrow{xy}\|$; alors,

$$\|G^{(\alpha)}(t,y) - G^{(\alpha)}(t,x)\| \leq C \times C_n |y-x| . \left[M + |\log \alpha| + \log \left[(|x|+1).(|y|+1) \right] \right].$$

Compte-tenu de (jj) et (jjj) les fonctions $G^{(\alpha)}$ vérifient les hypothèses de la proposition 2 et on peut leur appliquer le résultat de la 1ère étape et l'inégalité (3).

Nous aurons besoin d'un lemme sur l'approximation de solutions d'équations différentielles, qui est démontré dans [8].

LEMME 4. Soient F et G deux applications continues : $I \times U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et U un domaine de $\mathbb{R}^n$.

Si les équations : $y'(t) = F(t\ ,\ y(t))$ $\quad y(t_o) = y_o (y_o \in U)$

$z'(t) = G(t\ ,\ z(t))$ $\quad z(t_o) = y_o$

ont des solutions notées y et z.

Si de plus $\|F - G\| < \varepsilon$ sur $I \times U$ et si sur $I \times U \times U$, $\|F(t,y_2) - F(t,y_1)\| < K_o \|y_2 - y_1\|$, alors, tant que $y(t)$ et $z(t)$ restent dans U, on a :

$$\|y(t) - z(t)\| \leq \frac{\varepsilon}{K_o} (\exp K_o |t-t_o| - 1).$$

Notons $E_\alpha(t_o\ ,\ y_o)$ l'équation : $y'(t) = G^\alpha(t\ ,\ y(t))$, $y(t_o) = y_o$.

Nous avons vu que E_α admet une solution définie sur $[0,1]$. Son unicité résulte de (jv) et du théorème de Cauchy-Lipschitz. Il suffit donc de montrer, en utilisant le lemme 4, que les solutions de $E_\alpha(t_o,y_o)$ convergent uniformément vers toute solution de $E(t_o,y_o)$, lorsque $\alpha \longrightarrow 0$, ceci dans un voisinage de t_o. Pour appliquer le lemme 4 on pose :

$$I = [0,1] \quad , \quad U = B(0\ ,\ A^{-1}(K + A(|y_o|)) = B(0\ ,\ R_{y_o})$$

$$\varepsilon = \alpha C \times C_n \quad , \quad K_o = C\,C_n\left[M + |\log \alpha| + 2\log(1+R_{y_o})\right]$$

$$= C\,C_n\left[|\log \alpha| + M_{y_o}\right].$$

Soit y_α la solution $E_\alpha(t_o\ ,\ y_o)$ et y une solution de $E(t_o\ ,\ y_o)$. U ayant été choisi de sorte que y et y_α restent dans U pour tout $t \in [0,1]$, on a :

$$\| y-y_\alpha \| \leq \frac{\alpha C \times C_n}{C.C_n\left[|\log \alpha| + M_{y_o}\right]} \exp\left(C\,C_n\left[|\log \alpha| + M_{y_o}\right](t-t_o)\right).$$

On voit donc que les y_α convergent uniformément vers y lorsque $|t - t_o| < \dfrac{1}{2\,C\,C_n}$ et $\alpha \longrightarrow 0$. La 2ème étape est donc finie.

3ème étape. Continuité des applications h_{st}.

L'existence et l'unicité de la solution de $E(t_o,y_o)$ pour tout $(t_o,y_o) \in [0,1]\times$ implique que les fonctions h_{st}, définies par $x = y(x_o,s) \Longrightarrow h_{st}(x) = y(x_o,t)$, existent bien. Ici $y(x_o\ ,\ .)$ désigne la solution de $E(0,x_o)$. Montrons que les h_{st} sont continues. Pour cela fixons t_o et y_o

$$\frac{d}{dt}\left[h_{t_o t}(y) - h_{t_o t}(y_o)\right] = G\left[t, h_{t_o t}(y)\right] - G\left[t, h_{t_o t}(y_o)\right]$$

$$\exists\, M > 0 \,/\, |y-y_o| < 1 \Longrightarrow \forall\, (t,t_o) \in [0,1]^2 \ |h_{tt_o}(y)| < M$$

et $\exists\, K_M > 0 \,/\, |z| < M$ et $|z'| < M \Longrightarrow$

$$(4) \qquad |G(t,z) - G(t,z')| \leq K_M |z - z'| \left[1 + \left|\log |z-z'|\right|\right].$$

Si $y \neq y_o$, $\|h_{t_o t}(y) - h_{t_o t}(y_o)\|$ ne s'annule pas et est différentiable sur $[0,1]$, $\|\ .\ \|$ désignant la norme euclidienne. Notons $u(t) = \|h_{t_o t}(y) - h_{t_o t}(y_o)\|$. On a, d'après (4) : $|u'(t)| \leq K_M\, u(t)(1 + |\log u(t)|)$.

L'intégrale $\int_o^{+\infty} \frac{du}{u(1+|\log u|)}$ diverge en 0 et $+\infty$. Soit donc une primitive de $\frac{1}{u(1+|\log u|)}$, notée B et définie sur $]0, +\infty[$. Pour tout $(t,t') \in [0,1]^2$, on a :

$$|B(u(t)) - B(u(t'))| \leq K_M |t-t'| \leq K_M$$

$$\Longrightarrow u(t) \leq B^{-1}\left[K_M + B(|y-y_o|)\right].$$

D'où $\lim_{\|y-y_o\| \to 0} \left[\sup_{t \in [o,1]} u(t)\right] = 0$. Ceci prouve que les h_{st} sont équicontinues pour s fixé, en tout point de $\mathbf{R}^n$, uniformément sur tout compact.

La proposition 2 est donc démontrée. Il ne reste plus, pour démontrer le théorème 2, qu'à prouver que les h_{st} sont dans $\mathcal{G}$.

Démonstration du théorème 2.

Nous allons procéder en deux étapes. Dans la première nous montrerons que les homéomorphismes $h_{st}^{(\alpha)}$, définis comme les h_{st} en remplaçant G par $G^{(\alpha)}$, sont dans $\mathcal{G}$ uniformément en α. Dans la seconde nous montrerons que les h_{st} sont dans $\mathcal{G}$ en utilisant la convergence uniforme sur tout compact de $h_{st}^{(\alpha)}$ vers h_{st} dès que $|s-t| < \frac{1}{2\,C\,C_n}$. Le cas général s'en déduira par composition.

1ère étape. $h_{st}^{(\alpha)}$ est dans $\mathcal{G}$.

Ainsi que nous l'avons vu plus haut, le lemme suivant est la clé qui permet d'utiliser des inégalités a priori. Pour alléger, nous omettons les α dans la 1ère étape.

LEMME 5. h_{st} est dérivable partout et

$$\log(h_{st})'(x) = \int_s^t b_u\,(h_{su}(x))\,du\ .$$

Démonstration du lemme 5.

$$\frac{\partial}{\partial u} h_{su}(x) = G(u\ ,\ h_{su}(x)) \Longrightarrow$$

$$h_{st}(x) = x + \int_s^t G(u\ ,\ h_{su}(x))\, du$$

$$\Longrightarrow \frac{h_{s,t}(y) - h_{s\,t}(x)}{y - x} = 1 + \int_s^t \frac{G(u,h_{su}(y)) - G(u,h_{su}(x))}{y - x}\, du$$

$$= 1 + \int_s^t \frac{G(u,h_{su}(y)) - G(u,h_{su}(x))}{h_{su}(y) - h_{su}(x)} \cdot \frac{h_{su}(y) - h_{su}(x)}{y - x}\, du\ .$$

Soit H_{xys} définie sur $[0,1]$ par la formule suivante :

$$H_{xys}(u) = \frac{G(u,h_{su}(y)) - G(u\ ,\ h_{su}(x))}{h_{su}(y) - h_{su}(x)}\ .$$

Lorsque u et s varient sur $[0,1]$, x et y restant bornés, $H_{xys}(u)$ reste borné grâce à (jv) (cf. p. 17).

x , y et s étant fixés, $\dfrac{h_{su}(y) - h_{su}(x)}{y - x}$ est solution de l'équation

$z'(u) = H_{xys}(u)\, z(u)$; $z(s) = 1$.

H_{xys} étant borné, la solution de l'équation est donnée par :

$$\frac{h_{st}(y) - h_{st}(x)}{y - x} = \exp \int_s^t H_{xys}(u)\, du.$$

Nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée en faisant tendre y vers x, ce qui donne le lemme. Remarquons que les $h_{st}^{(\alpha)}$ sont dans $\mathcal{H}_o$. Le lemme 5 est démontré. Il nous montre que, localement, les $h_{st}^{(\alpha)}$ sont dans $\mathcal{G}$ puisque $b_t^{(\alpha)}$ est localement borné. C'est ce qui nous donnera l'hypothèse a priori. Signalons que c'est le lemme 5 qui nous a amené à conjecturer l'implication (i) $\Longrightarrow$ (iii) du théorème 1.

Voici quelques notations pour alléger la démonstration qui va suivre. Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $h \in \mathcal{H}_o$ et $R > 0$.

On note $\|f\|_R = \sup_{I \subset [-R,R]} \int_I \frac{1}{|I|} |f - m_I f|\, dx$

$$\text{et} \quad \|V_h\|_R = \sup_{f \in BMO} \frac{\|f \circ h\|_R}{\|f\|_*}$$

$$\|f\|_* = \lim_{R \to +\infty} \|f\|_R \qquad \text{et} \qquad \|V_h\| = \lim_{R \to +\infty} \|V_h\|_R .$$

On note aussi $J(R) = \sup_{(u,s) \in [0,1]^2,\ |x|<R} |h_{su}(x)|$.

Rappelons enfin une version locale d'un énoncé classique : $\exists\ \gamma > 0$, $\exists\ C_o > 0$ / $\forall\ R > 0$, $\|\log h'\|_R < \gamma \Longrightarrow \|V_h\|_R < C_o$.

Nous allons maintenant montrer que :

$$\forall\ R > 0 \quad |t-s| \leq \frac{\gamma}{C_o C} \Longrightarrow \|V_{h_{st}}\|_R \leq C_o ,$$

ce qui conclura évidemment la 1ère étape.

En utilisant le lemme 5 sous sa forme locale on obtient :

$$\|\log(h_{st})'\|_R \leq C \int_s^t \|V_{h_{su}}\|_R \, du \qquad (5).$$

$\|V_{h_{su}}\|_R$ n'étant pas nécessairement mesurable par rapport à u, cette intégrale désigne l'intégrale supérieure.

D'après (5)

$$\int_s^t \|V_{h_{su}}\|_R \, du \leq \frac{\gamma}{C}$$

$$\Longrightarrow \|V_{h_{su}}\|_R \leq C_o \quad \text{pour tout} \quad u \in [s,t].$$

Pour conclure que $\|V_{h_{su}}\|_R \leq C_o$ si $|u-s| < \frac{\gamma}{C\,C_o}$, il suffit de montrer que $\sup_{(s,u) \in [0,1]^2} \|V_{h_{su}}\|_R < +\infty$, ainsi qu'on peut le voir en se reportant à la page 10 .

Un calcul très simple montre que :

$$\sup_{|x|<R} |\log(h_{st})'| \leq C \Longrightarrow \|V_{h_{st}}\|_R \leq \exp 2C .$$

En appliquant à nouveau le lemme 5, on voit que :

$$\sup_{|x|<R} |\log(h_{st})'| < |t-s| \sup_{u\in[0,1]} \sup_{|x|\le J(R)} |b_u(x)| .$$

L'expression de gauche est finie car b_u désigne en fait $b_u^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in]0,1[$

En conclusion : $\forall (s,t) \in [0,1]^2 \quad \|V_{h_{st}}\| \le C_o^{\frac{C_o C}{\gamma}+1}$.

2ème étape. Convergence des $h_{st}^{(\alpha)}$ vers h_{st}.

Nous avons vu l'existence d'une constante C_1 telle que $\left(|s-t| < \frac{1}{C C_1}\right)$ entraîne la convergence uniforme sur tout compact lorsque α tend vers 0, de $h_{st}^{(\alpha)}$ vers h_{st}. Nous conclurons donc la démonstration du théorème 2 avec le lemme suivant

$\mathcal{H}$, muni de la topologie de la convergence compacte, désigne l'espace de tous les homéomorphismes croissants de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

LEMME 6. Soit $A > 0$ et soit $\mathcal{G}_A = \{h/h\in\mathcal{G}$ et $\|V_h\| < A\}$ alors

$$\exists A' > 0 \,/\, (\overline{\mathcal{G}_A}) \subset \mathcal{G}_{A'} .$$

Démonstration du lemme 6.

Soit h_n une suite d'éléments de $\mathcal{G}_A$ ayant dans $\mathcal{H}$ une limite h. On déduit de la démonstration de P. Jones l'existence de deux constantes α_A et β_A dans $]0,1[$ telles que :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad \forall E \subset I \quad \frac{|E|}{|I|} < \alpha_A \Longrightarrow \frac{|h_n(E)|}{|h_n(I)|} < \beta_A .$$

Soit donc E un mesurable inclus dans I et U un ouvert tel que

$E \subset U \subset I$ et $\frac{|E|}{|I|} \le \frac{|U|}{|I|} < \alpha_A$.

Soit $\{]a_p, b_p[, p\in\mathbb{N}\}$ la décomposition de U en intervalles.

$$|h_n(U)| = \sum_{p\in\mathbb{N}} [h_n(b_p) - h_n(a_p)] \Longrightarrow$$

$$\liminf_{n\to+\infty} |h_n(U)| \ge \sup_{p\in\mathbb{N}} \left[\lim_{n\to+\infty} \sum_{q=0}^{p} (h_n(b_q) - h_n(a_q))\right]$$

$$\ge |h(U)|$$

d'où $$\frac{|h(U)|}{|h(I)|} \leq \beta_A \quad \text{et} \quad \frac{|h(E)|}{|h(I)|} \leq \beta_A$$

h est donc dans $\mathcal{G}$ et $\|V_h\|$ est majoré par une constante ne dépendant que de A. Le lemme 6 est démontré.

Ceci termine la démonstration du théorème 2. Ce théorème qui est, en quelque sorte, une réciproque de la construction de Coifman-Meyer explicitée dans [3], peut se généraliser de façon à donner une forme de réciproque au théorème A_2 de la page iv. Nous obtenons ainsi le théorème 3 où nous reprenons les notations de la proposition 2.

THEOREME 3. Si G, définie de $[0,1]\times\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, vérifie les hypothèses de la proposition 2, et s'il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $t \in [0,1]$, $\left\| \frac{dG_t}{d\bar{z}} \right\|_\infty < C_2$, alors il existe $K(C_2) > 0$ telle que pour tout t, $\gamma(.,t)$ soit $K(C_2)$-quasi-conforme.

Démonstration du théorème 3.

Nous allons, comme pour le théorème 2, procéder en deux étapes identiques dans le fond à celles de la démonstration du théorème 2. En particulier nous montrerons dans la seconde étape un analogue du lemme 6 pour les applications quasi-conformes.

1ère étape. $h_{st}^{(\alpha)}$ est quasi-conforme.

Ici également nous omettons les α pour alléger l'écriture, tout en nous souvenant que les propriétés utiles des G^α pour $\alpha \in]0,1]$ sont les suivantes :

a) $D_x G(.\ ,\ .)$ est borné sur tout ensemble du type : $[0,1]\times\{x\in\mathbb{R}^2 / \|x\| < R\}$,

b) Les G^α vérifient uniformément les hypothèses du théorème 3 avec les mêmes constantes que G.

Les h_{st} ayant été définies dans la démonstration de la proposition 2 (3ème étape), nous notons $J_{h_{st}}$ la matrice jacobienne de h_{st} lorsqu'elle existe. Supposons que l'on ait montré que h_{st} est partout différentiable. Nous voulons montrer l'existence de K telle que :

$$\|J_{h_{st}}\|^2 \leq K^2 \left|\det J_{h_{st}}\right| \quad \text{ou} \quad \|{}^\tau J_{h_{st}} J_{h_{st}}\| \leq K^2 \left|\det J_{h_{st}}\right|.$$

Si l'on a montré que, pour tout x, $J_{h_{st}}$ est dérivable par rapport à t, la formule $[\det M(t)]' = \det M(t).\mathrm{tr}(M^{-1}(t).M'(t))$, valable pour toute fonction $M(t)$ dérivable de dans $GL_n(\mathbb{R})$, nous permet d'écrire, en notant J pour $J_{h_{st}}$ et J' pour $(\frac{d}{dt}J)$,

$$\frac{d}{dt}(\det J) = \det J.\mathrm{tr}\left(J' \,.J^{-1}\right)$$

et
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{{}^tJ.J}{\det J}\right) = \frac{{}^tJ.J' + {}^tJ'J - \mathrm{tr}\left[J'.J^{-1}\right]{}^tJ.J'}{\det J}\ .$$

Arrivés à ce stade, nous devons trouver une formule explicite pour $\frac{d}{dt}J$. Le lemme suivant nous la donne ainsi que la différentiabilité de h_{st}.

LEMME 7. $\forall\,(s,t)\in[0,1]^2$, h_{st} est différentiable partout et $\frac{d}{dt}\left[J_{h_{st}}(x)\right] = D_x G_t(h_{st}(x)).J_{h_{st}}(x)$ au sens des fonctions. De plus $J_{h_{st}}$ est continue.

Avant de démontrer le lemme 7, voyons comment il permet de conclure cette première étape. Notons $\mathcal{M} = D_x G_t(h_{st}(x))$. Alors le lemme 7 donne

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{{}^tJ.J}{\det J}\right] = \frac{{}^tJ({}^t\mathcal{M}+\mathcal{M}-\mathrm{tr}\,\mathcal{M})J}{\det J} \qquad (1).$$

Si l'on prend pour norme sur $\mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, $\|(a_{ij})\| = \left[\Sigma\, a_{ij}^2\right]^{1/2}$, l'hypothèse $\left\|\frac{d}{d\bar z}G_t\right\|_\infty \le C_2$ entraîne $\|{}^t\mathcal{M}+\mathcal{M}-\mathrm{tr}\,\mathcal{M}\,I_2\| \le 4\,C_2$. Il est donc très facile de voir que (1) entraîne que :

$$\forall\,(s,t)\in[0,1]^2 \quad \frac{\|\,{}^tJ_{h_{st}}J_{h_{st}}\|}{|\det J_{h_{st}}|} \le e^{4C_2}\ .$$

Pour conclure la 1ère étape, il nous reste à démontrer le lemme 7.

Démonstration du lemme 7.

Soit (e_1, e_2) une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$. Pour toute fonction f à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, on note f^k sa composante sur e_k, $k\in\{1,2\}$.

Soient $x\in\mathbb{R}^2$, $(s,t)\in[0,1]^2$, $(i,j)\in\{1,2\}^2$ et $\lambda\in\mathbb{R}$.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\lambda}(h^i_{st}(x+\lambda e_j) - h^i_{st}(x))\right] =$$

$$\frac{1}{\lambda}\left[G^i(t\ ,\ h_{st}(x+\lambda e_j)) - G^i(t, h_{st}(x))\right] =$$

$$\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial G^i}{\partial x_k}(t, y_k) \times \frac{h^k_{st}(x+\lambda e_j) - h^k_{st}(x)}{\lambda} \quad ,$$

où les y_k sont des éléments de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées sont entre celles de $h_{st}(x)$ et de $h_{st}(x+\lambda e_j)$.

s , x et λ étant fixés, les fonctions $\frac{1}{\lambda}\left[h^i_{st}(x+\lambda e_j) - h^i_{st}(x)\right]$ $(i \in \{1,2\})$ de la variable t sont donc solutions d'un système différentiel linéaire du premier ordre, à coefficients variables mais uniformément bornés en i , j , s et t tant que λ reste borné. Il reste à faire tendre λ vers 0 en utilisant le fait que $\frac{1}{\lambda}\left[h_{st}(x+\lambda e_j) - h_{st}(x)\right] = e_j$ lorsque $s = t$ et en appliquant le lemme 4. On voit immédiatement que $\frac{1}{\lambda}\left[h_{st}(x+\lambda e_j) - h_{st}(x)\right]$ converge, lorsque λ tend vers 0, vers une fonction $f_{jst}(x)$, uniformément en $t \in [0,1]$ et uniformément en x, tant que x reste borné. Les fonctions f_{jst} sont donc continues, ce qui implique la différentiabilité de h_{st} en tout point de $\mathbb{R}^2$. Enfin, pour voir que $J_{h_{st}}$ vérifie l'équation du lemme 7, il suffit de remarquer que f_k $(k \in \{1,2\})$ tend vers $h_{st}(x)$ lorsque λ tend vers 0 et d'utiliser la continuité de $\frac{\partial G^i}{\partial x_k}(t,.)$.

Le lemme 7 est démontré. Passons à la 2ème étape.

2ème étape. Convergence des $h^{(\alpha)}_{st}$ vers h_{st}.

Comme pour le théorème 2, il nous suffit pour conclure de montrer le lemme suivant.

LEMME 8. $\forall\ K > 0$, $\exists\ C(K) > 0$ telle que si h_n est une suite d'applications K-quasi-conformes de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ convergeant uniformément sur tout compact vers un homéomorphisme de $\mathbb{R}^2$ noté h, alors h est $C(K)$-quasi-conforme.

Démonstration du lemme 8.

Reprenons les notations de la partie 0, paragraphe 3. Il suffit de montrer

l'existence d'une constante $C(K)$ telle que, si φ est K-quasi-conforme, $\sup_{(x,r)} \frac{L_\varphi(x,r)}{\ell_\varphi(x,r)} < C(K)$. En effet, cette dernière propriété se conserve par passage à la limite uniforme sur tout compact. L'existence de cette constante $C(K)$ peut se voir à partir d'un lemme démontré et utilisé par Reimann dans [14].

LEMME R. Soit φ une application de R^2, K-quasi-conforme. Il existe une constante $C'(K)$ telle que :

si D' est un disque centré sur un point $\varphi(A)$, il existe un disque D centré sur A tel que :

$$D' \subseteq \varphi(D) \quad \text{et} \quad \operatorname{diam} \varphi(D) \leq C'(K) \operatorname{diam} D'.$$

Soit $A \in \mathbb{R}^2$ et $D(A, r)$. Soit D' le disque centré en $\varphi(A)$ et de diamètre $\frac{1}{C'(K)} \operatorname{diam} \varphi(D(A,r))$. D'après le lemme R, il existe r' tel que :

$$D' \leq \varphi(D(a,r')) \quad \text{et} \quad \frac{\operatorname{diam} \varphi(D(q,r'))}{C'(K)} \leq \operatorname{diam} D' .$$

r' est donc inférieur à r, d'où enfin :

$$\frac{L_\varphi(A,r)}{\ell_\varphi(A,r)} \leq \frac{\operatorname{diam} \varphi(D(A,r))}{\operatorname{ray} D'} \leq 2C'(K). \qquad \text{CQFD}$$

En fait, on a démontré le théorème un peu plus général suivant

THEOREME 3 bis. Si G définie de $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, vérifie les hypothèses de la proposition 2, et s'il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $t \in [0,1]$: $\left\| D_x G_t + {}^t D_x G_t - \frac{2}{n} \operatorname{tr} D_x G_t \right\|_\infty < C_2$, alors il existe $K(C_2, n)$ telle que pour tout t, $y(.,t)$ soit $K(C_2,n)$-quasi-conforme.

Il est en effet facile de vérifier pour $n = 2$ que les deux théorème coïncident et que toute la démonstration du théorème 3 se généralise en dimension supérieure à 2. Cette généralisation présente pour le moment peu d'intérêt car on ne sait pas encore si, en dimension 3 ou plus, toute application quasi-conforme s'obtient comme une fonction $(y(.,1)), G$ vérifiant les hypothèses du théorème 3 bis, alors qu'en dimension 2 le

théorème A_2 nous dit que c'est le cas et qu'en dimension 1 la construction de Coifman-Meyer reste valable sans restriction sur $\log h'$. Pour la même raison on n'écrira pas les corollaires qu'on pourrait obtenir en supposant G indépendant de t. Dans ce cas. les fonctions $y(.,t)$ forment des groupes à un paramètre. Or on peut montrer, dans $\mathcal{G}$ par exemple, que toute application quasi-conforme n'admet pas nécessairement dans $\mathcal{G}$ de racine carrée pour la composition. Nous donnerons sans développement le contre-exemple suivant : soit h_ε défini par : $h_\varepsilon(x) = x + 1 - \varepsilon \sin^2 \pi x$, $(0 < \varepsilon < \frac{1}{4\pi})$. h_ε est dans $\mathcal{G}$ et n'a pas de racine carrée, a fortiori n'est atteint par aucun sous-groupe à un paramètre. Nous faisons cette remarque surtout pour signaler que c'est cette question de Carl Herz, à savoir : peut-on remplacer le chemin de Coifman-Meyer par un sous groupe à un paramètre ? - qui a été le point de départ de toute cette étude.

Pour conclure cette première partie, je voudrais répondre à une question naturelle qui se pose à propos du théorème 3 : quelles sont les familles $\{h_t\ ,\ t \in [0,1]\}$ obtenues sous la forme $\{y(.,t)\ ,\ t \in [0,1]\}$ grâce au théorème 3 ? La même question posée à propos du théorème 2 a sa réponse dans le théorème 1 : ce sont les familles h_t telles que

- $\forall\, x \quad h_t(x) \in C^1([0,1])$
- $\log(h_t)'$ est dérivable et à dérivée bornée dans BMO (comme fonction de t).

On peut répondre à cette question en lisant [1], à l'aide de l'éclairage qu'y apporte Yves Meyer dans [6]. Les familles h_t obtenues sont exactement celles qui vérifient :

- $\forall\, x \quad h_t(x) \in C^1([0,1])$
- μ_{h_t} est dérivable à dérivée bornée dans L^∞.

Annexe à la première partie

Cette annexe comporte elle-même trois parties. Dans la première, nous donnons une démonstration de la proposition 1 énoncée page 1 . Dans la seconde, nous montrons comment on peut compléter le théorème 1 de la page 2 en considérant les chemins $\{h_t , t\in [0,1]\}$ tels que $V_{h_t} H V_{h_t^{-1}}$ soit dérivable à dérivée bornée dans $\mathcal{L}$(BMO,BMO muni de la topologie de norme d'opérateurs. Ceci se ramène à montrer un analogue du théorème G. D. dans le cas de BMO : nous obtenons alors le théorème 4 de la page 31 . Dans la troisième partie de cette annexe nous répondons, par le biais du théorème 5 de la page 35, à une question de Coifman. Précisément, nous donnons une condition suffisante et "presque nécessaire" sur $h \in \mathcal{H}_o$ pour que $V_h H V_{h^{-1}}$ soit continu sur Λ_α, condition que nous pouvons comparer avec son analogue lorsque l'on remplace Λ^α par BMO, cette dernière étant donnée par le théorème 4.

A_1. Démonstration de la proposition 1.

Reprenons les notations de la proposition 1 et supposons U continue. Nous allons montrer que les homéomorphismes h_t laissant fixes 0 et 1 et tels que $\log(h_t)' = U(t)$, forment un chemin continu de $\mathcal{G}$. Pour cela nous devons vérifier que :

$\forall\, t_o \in [0,1]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$: $\lim_{t\to t_o} h_t(x) = h_{t_o}(x)$, ce qui équivaut à

$\forall\, t_o \in [0,1]$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ $\lim_{t\to t_o} h_t \circ h_{t_o}^{-1}(x) = x$.

Or, $\lim_{t\to t_o} \left\| \log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})' \right\|_* = 0$, $h_t \circ h_{t_o}^{-1}(0) = 0$ et $h_t \circ h_{t_o}^{-1}(1) = 1$.

Appelons b_t la fonction $\log(h_t \circ h_{t_o}^{-1})'$ et appliquons lui l'inégalité de John et Nirenberg (cf. [9]) ; I est un intervalle quelconque ; λ et C sont deux constantes absolues

$$\frac{1}{|I|}\int_I e^{\frac{\lambda}{\|b_t\|_*}|b_t - m_I b_t|}\,dx < C \qquad \text{(I. J. N.)}.$$

Soit $I = [0,1]$. $\int_I e^{b_t}\,dx = 1$. D'où

$$\lim_{t\to t_o}\int_I e^{b_t - m_I b_t}\,dx = 1 \Longrightarrow \lim_{t\to t_o} m_I\, b_t = 0.$$

Soit $J = [0,x]$ ou $[-x,0]$: $\|b_t\|_* \to 0 \Longrightarrow \lim_{t\to t_o} m_J\, b_t = 0$.

D'où

$$1 \le \frac{1}{|J|}\int_J e^{b_t - m_J b_t}\,dx \le 1 + \varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t\to t_o}\varepsilon(t) = 0$$

$$\Longrightarrow \lim_{t\to t_o} \frac{h_t \circ h_{t_o}^{-1}(x) - h_t \circ h_{t_o}^{-1}(0)}{x} = 1.$$

Supposons maintenant que U soit dérivable. Nous gardons la même détermination pour les h_t. Nous voulons vérifier que

$$\forall\, t_o \in [0,1],\ \forall\, x \in \mathbb{R},\quad \lim_{t\to t_o} \frac{h_t(x) - h_{t_o}(x)}{t - t_o} \text{ existe, ce qui équivaut à :}$$

$$\forall\, t_o \in [0,1],\ \forall\, x \in \mathbb{R}\quad \lim_{t\to t_o} \frac{h_t \circ h_{t_o}^{-1}(x) - x}{t - t_o} \text{ existe, soit :}$$

$$\lim_{t\to t_o}\left[\int_o^x \frac{e^{b_t(y)} - 1}{t - t_o}\,dy\right] \text{ existe.}$$

Il suffit donc de montrer que :

$$\lim_{t\to t_o}\left|\int_o^x \frac{e^{b_t(y)} - 1 - b_t(y)}{t - t_o}\,dy\right| = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t\to t_o}\int_o^x \frac{b_t(y)}{t - t_o}\,dy \text{ existe.}$$

(On suppose $x \ge 0$, le cas $x \le 0$ s'en déduisant).

Occupons-nous de la première égalité. L'hypothèse de dérivabilité de U implique $\lim_{t\to t_o} \frac{\|b_t\|_*}{|t - t_o|} < +\infty$.

Utilisons l'inégalité : $\forall\, u \in \mathbb{R} : \left|e^u - 1 - u\right| \le u^2 e^{|u|}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz ; il nous suffit d'avoir :

$$\lim_{t \to t_o} \frac{1}{(t-t_o)^2} \int_o^x b_t^4(y)dy . \int_o^x e^{2|b_t(y)|} dy = 0.$$

Par un raisonnement analogue à celui que l'on a fait lorsque U est continue, on majore la seconde intégrale par $2x$ dès que t est suffisamment proche de t_o. Pour évaluer la première, nous la majorons, en utilisant $((x+y)^4 \le 8(x^4+y^4))$, par

$$8 \int_o^x \left[(b_t - m_{[0,x]}\, b_t)^4 + (m_{[0,x]}\, b_t)^4 \right] dy$$

$$\le 8x\, C_4 \|b_t\|_*^4 + 8x (m_{[0,x]}\, b_t)^4 .$$

Or, comme $(m_{[0,x]}\, b_t)^4 \le 8C(x)\|b_t\|_*^4 + 8(m_{[0,1]}\, b_t)^4$, on voit que, pour la première égalité, tout revient à montrer que

$$\lim_{t \to t_o} \frac{(m_{[0,1]}\, b_t)^2}{|t-t_o|} = 0.$$

L'inégalité de John Nirenberg nous donne, si $\|b_t\|_* < \lambda$:

$$1 \le \int_o^1 e^{b_t - m_{[0,1]}\, b_t} dx \le C^{\frac{\|b_t\|_*}{\lambda}} \quad \text{avec} \quad \int_o^1 e^{b_t} dx = 1.$$

Donc $0 \le - m_{[0,1]}\, b_t \le \frac{\|b_t\|_*}{\lambda} \log C$, d'où le résultat.

Pour l'existence de $\lim_{t \to t_o} \int_o^x \frac{b_t(y)}{t-t_o} dy$, on regarde le cas $(x = 1)$. D'après la première égalité et $\int_o^1 e^{b_t} dx = 1$ on a $\lim_{t \to t_o} \int_o^1 \frac{b_t(y)}{t-t_o}\, dy = 0$.

Soit maintenant $d_{t_o} \in BMO / \lim_{t \to t_o} \left\| \frac{b_t}{t-t_o} - d_{t_o} \right\|_* = 0$. D'où :

$$\lim_{t \to t_o} \left[\left(\frac{1}{t-t_o}\, m_{[0,x]}\, b_t - m_{[0,x]} d_{t_o} \right) - \left(\frac{1}{t-t_o}\, m_{[0,1]}\, b_t - m_{[0,1]}\, d_{t_o} \right) \right] = 0$$

$\frac{m_{[0,1]}\, b_t}{t - t_o}$ ayant une limite, $\frac{m_{[0,x]}\, b_t}{t - t_o}$ aussi. CQFD

A_2. Comportement global de $V_h H V_{h^{-1}} - H$.

Alors que $U_h H U_{h^{-1}}$ est automatiquement continu, car unitaire, sur L^2, l'opérateur $V_h H V_{h^{-1}}$ n'est continu sur BMO que si h est dans $\mathcal{G}$. De plus, comme dans le cas de $U_h H U_{h^{-1}}$ cette fois, $V_h H V_{h^{-1}}$ n'est proche de H que si $\|\log h'\|_*$ est petit. Nous résumons ceci dans le théorème 4.

THEOREME 4. Soit $h \in \mathcal{H}_o$. $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu sur BMO ssi $h \in \mathcal{G}$. De plus :

- $\exists C_1 > 0 / \forall h \in \mathcal{G} \quad \|V_h\| < C_1 [1 + \|V_h H V_{h^{-1}}\|]$
- $\exists C_2 > 0 / \forall h \in \mathcal{G} \quad \|\log h'\|_* < C_2 \|V_h H V_{h^{-1}} - H\|$.

Démonstration du théorème 4.

Le premier énoncé est une conséquence quasi-immédiate des deux faits suivants, le second étant démontré dans [7].

- $\forall \ f \in L^\infty \qquad \|f\|_* \leq \|f\|_\infty$
- $\exists C_H > 0 / \forall f \in BMO / \exists (f_1, f_2) \in (L^\infty)^2$ telles que :

$(H_1) \qquad \|f_1\|_\infty + \|f_2\|_\infty < C_H \|f\|_* \quad$ et $\quad f = f_1 + H f_2$.

Si $h \in \mathcal{G}$, $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu. Réciproquement, si $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu, soit A sa norme d'opérateur.

Soit $f \in BMO$, f_1 et f_2 dans L^∞, vérifiant H_1.

$$\begin{aligned} \|V_h f\|_* &\leq \|V_h f_1\|_* + \|V_h H f_2\|_* \\ &\leq \|V_h f_1\|_\infty + \|V_h H V_{h^{-1}} V_h f_2\|_* \\ &\leq \|f_1\|_\infty + A\|V_h f_2\|_* \leq \|f_1\|_\infty + A\|f_2\|_\infty \\ &\leq (1+A) C_H \|f\|_* \end{aligned}$$

d'où $$\|V_h\| \leq [1 + \|V_h H V_{h^{-1}}\|] \ C_H < +\infty.$$

Le premier énoncé est donc démontré.

Le deuxième énoncé, compte-tenu du premier et de l'analyticité de $V_h H V_{h^{-1}}$ comme fonction de $\log h'$ définie dans une boule de BMO de centre 0 et de rayon (cf. [3]), est clairement entraîné par les deux lemmes suivants :

LEMME 1. $\exists C > 0 / \forall h \in \mathcal{G} \quad \|V_h\| \geq C \|\log h'\|_*$.

LEMME 2. $\forall \delta > 0$ et $\forall C_o > 0 \quad \exists C > 0 /$
$\forall h \in \mathcal{G} \quad \|\log h'\| \geq \delta$ et $\|V_h\| \leq C_o \Longrightarrow \|V_h H V_{h^{-1}} - H\| \geq C.$

Démonstration du lemme 1.

Soit I_o un intervalle tel que $\frac{1}{|I_o|}\int_{I_o} |\log h' - m_{I_o} \log h'| dx \geq \frac{1}{2}\|\log h'\|_*$ et $E_o \subset I_o$ défini par : $E_o = I_o \cap \{x / \log h'(x) \leq m_{I_o} \log h'\}$. Nous allons tester V_h sur $(X_E)^*$ pour minorer sa norme d'opérateur sur BMO. Plus exactement nous allon utiliser le lemme suivant qui se déduit de la démonstration du théorème de Peter Jones (cf. [10]).

LEMME P. J. $\exists C > 0 /$ si $h \in \mathcal{G}$, si $E \subset I$ sont respectivement un mesurable et un intervalle vérifiant :

$$\frac{|E|}{|I|} \geq \alpha \quad \text{et} \quad \frac{|h(E)|}{|h(I)|} \leq \beta \quad , \quad \text{alors} \quad \|V_h\| \geq C\, \alpha |\log \beta| .$$

Le lemme suivant va nous permettre de conclure.

LEMME A. $\exists \alpha_o > 0 /$ si E_o et I_o sont comme définis plus haut :

$$(1 - \alpha_o)|I_o| \geq |E_o| \geq \alpha_o |I_o| .$$

Pour appliquer le lemme P. J. nous devons montrer l'existence d'une constante β_h telle que : $|h(E_o)| < \beta_h |h(I_o)|$.

Appelons F_o le complémentaire de E_o dans I_o. D'après la définition de E_o : $\frac{1}{|I_o|}\int_{|E_o|} h'(x)\, dx \leq \exp(m_{I_o} \log h')$ et par l'inégalité de Jensen :

$$\frac{1}{|F_o|}\int_{t_o} h'(x)dx \geq e^{m_{I_o}\log h'} \; e^{1/F_o \int_{F_o}(\log h' - m_{I_o}\log h')dx}$$

$$\geq \frac{|h(E_o)|}{|I_o|}\exp\frac{1}{4}\|\log h'\|_*$$

d'où $$\frac{|h(E_o)|}{|h(I_o)|} \leq \frac{|h(E_o)|}{|h(F_o)|} \leq \frac{1}{\alpha_o}\exp\left[-\frac{1}{4}\|\log h'\|_*\right].$$

Le lemme P. J. nous donne alors

$$\|V_h\| \geq \sup(1\ ,\ C\,\alpha_o(\tfrac{1}{4}\|\log h'\|_* - \log\varepsilon_o))\ ,$$

ce qui entraîne évidemment le lemme 1. Il reste toutefois à montrer le lemme A.

Démonstration du lemme A (abrégée).

Soit $f \in BMO$ et I tel que $\frac{1}{|I|}\int_I |f - m_I f|\,dx \geq \frac{1}{2}\|f\|_*$. Nous voulons montrer que les ensembles Y et Z définis par $Y = I \cap \{x\ /\ f(x) \geq m_I f\}$ et $Z = I \cap \{x\ /\ f(x) < m_I f\}$ sont toujours de tailles comparables. Or ceci est trivialement entraîné par le fait suivant, qui se déduit par exemple de l'I. J. N. (cf. p. 29).

$\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\, K > 0\ /\ \forall$ I intervalle, $\forall\, f \in BMO$:

$$\frac{1}{|I|}\int_{I\cap\{|f-m_I f|>K\|f\|_*\}} |f - m_I f|\,dx \leq \varepsilon\|f\|_*\ .$$

Le lemme 1 est donc complètement démontré.

Démonstration du lemme 2 (abrégée).

Remarquons que si f est bornée à support compact, donc dans $L^\infty \cap L^2$, on peut écrire, si $x \notin \text{supp } f$:

$$\left[(V_h H V_{h^{-1}})(f)\right](x) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{h'(y)}{h(y) - h(x)}\right) f(y)\,dy$$

et

$$\left[\left[V_h H V_{h^{-1}} - H\right](f)\right](x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{y-x}\left(\frac{h'(y)(y-x)}{h(y) - h(x)} - 1\right) f(y)\,dy \qquad (1).$$

Soit I un intervalle fixé d'extrémités a et b, tel que :

$$\frac{1}{|I|}\int_I |\log h' - m_I \log h'|\,dx \geq \frac{9}{10}\,\|\log h'\|_* .$$

Pour voir que l'hypothèse $\|V_h\| \leq C_o$ entraîne l'existence de deux constantes μ et $K(C_o)$ telles que :

$$\forall\, x \in I - K|I|,\ \forall\, y \in I \qquad \mu\left(1 - \frac{\delta}{100}\right) \leq \frac{y - x}{h(y) - h(x)} \leq \mu\left(1 + \frac{\delta}{100}\right),$$

il suffit d'appliquer le lemme P. J. en remplaçant E et I respectivement par I et $[a - K(b-a)\,,\ b]$.

Il est d'autre part facile de déduire du lemme A que

$$\frac{1}{|I|}\left|I \cap \left\{x \,/\, \log h' \geq -\log\mu + \frac{\delta}{10}\right\}\right| > \alpha_o \quad , \qquad \text{ou}$$

$$\frac{1}{|I|}\cdot\left|I \cap \left\{x \,/\, \log h' \leq -\log\mu + -\frac{\delta}{10}\right\}\right| > \alpha_o .$$

Remarquons qu'on a les deux inégalités si $\log\mu = -m_I \log h'$.

Appelons E_1 le premier ensemble, E_2 le second et T l'opérateur $V_h H V_h^{-1} - H$. En reprenant l'égalité (1) on voit que

$$\sup_{i \in \{1,2\}} \left\{ \left| m_{I-K|I|}\, T\, X_{E_i} \right| \right\} > \frac{1}{(K+1)|I|} \times \frac{\delta}{20} \times \alpha_o |I|$$

$$> \frac{\delta\,\alpha_o}{20(K+1)} .$$

D'autre part, si M est arbitrairement grand,

$$\sup_{i \in \{1,2\}} \left\{ \left| m_{I-M|I|}\, T\, X_{E_i} \right| \right\} \leq \int_I \frac{h'(y)\,dy}{h(y) - h(b - M|I|)}$$

$$\leq \left| \log \frac{h(b) - h(b - M|I|)}{h(a) - h(b - M|I|)} \right| .$$

Si M est supérieur à une constante $M(C_o)$, toujours en appliquant le lemme P. J., on aura

$$\sup_{i \in \{1,2\}} \left\{ \left| m_{I-M|I|}\, T\, X_{E_i} \right| \right\} \leq \frac{\delta\,\alpha_o}{40(K+1)}$$

et dans ce cas :

$$\sup_{i \in \{1,2\}} \left\{ \left| m_{I-K|I|}\, T\, X_{E_i} - m_{I-M|I|}\, T\, X_{E_i} \right| \right\} \geq \frac{\delta\,\alpha_o}{40(K+1)} \quad ,$$

d'où : $$\|T\| \geq \frac{\delta \alpha_o}{100(K+1)} \left|\log(M-K)\right|^{-1}.$$

Le théorème 4 est maintenant complètement démontré.

Il suffit de lire [3] pour s'apercevoir qu'on peut refaire, dans le cas de BMO, le travail que l'on a fait avec L^2 pour démontrer le théorème 1. On en déduit que pour une famille $\{h_t , t\in[0,1]\}$ vérifiant K_1 et K_2, il y a équivalence entre (i): h_t est chemin dérivable à dérivée bornée de $\mathcal{G}$, et (iv): $V_{h_t} H V_{h_t}^{-1}$ est un chemin continu, dérivable à dérivée bornée dans $\mathcal{L}(BMO,BMO)$.

A_3. Continuité de $V_h H V_{h^{-1}}$ sur Λ_α $(\alpha \in [0,1])$.

Il est tentant, compte-tenu du résultat particulièrement simple obtenu quant à la continuité de $V_h H V_{h^{-1}}$ sur BMO, d'essayer de résoudre la question suivante : quels sont les h, éléments de $\mathcal{H}_o$, pour lesquels $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu sur Λ_α ; Λ_α étant défini comme l'espace des fonctions f vérifiant $\sup_{(x,x')\in\mathbb{R}^2} \frac{|f(x)-f(x')|}{|(x-x')^\alpha|} < +\infty$. Λ_α est donc, quotienté par les fonctions constantes, un espace de Banach. On pourrait croire que, comme dans le cas de BMO, $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu si et seulement si V_h et $V_{h^{-1}}$ le sont, c'est-à-dire si et seulement si h et h^{-1} sont lipschitziens. Il est en effet exclus que V_h envoie continûment Λ^α sur Λ^β et $V_{h^{-1}}$ Λ^β sur Λ^α si $\alpha \neq \beta$. En fait, le résultat que nous obtenons montre qu'il y a un "effet de commutation" entre V_h et H sur Λ^α.

Soit $\gamma \in]0,1]$ et $\mathcal{C}_\gamma$ défini par : $h\in\mathcal{C}_\gamma$ ssi $h \in \mathcal{H}_o$ et $\exists C > 0 / \forall I,J$ intervalles/ tels que $J \subset I$: $\frac{|h(J)|}{|h(I)|} \leq C\left(\frac{|J|}{|I|}\right)^\gamma$. $\gamma \leq \gamma' \Rightarrow \mathcal{C}_{\gamma'} \leq \mathcal{C}_\gamma$.

On peut vérifier que $\bigcup_{\gamma>0} \mathcal{C}_\gamma$ est un groupe $\mathcal{G}'$ contenant $\mathcal{G}$.

En particulier $\forall (C,\gamma) \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1]$, $\exists (C',\gamma') \in \mathbb{R}_+^* \times]0,1]$ tel que : h est dans $\mathcal{C}_\gamma$ avec la constante C, entraîne que h^{-1} est dans $\mathcal{C}_{\gamma'}$ avec la constante C'.

THEOREME 5. Soit $h \in \mathcal{H}_o$. Si h est dans $\mathcal{C}_\gamma$, $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu

sur Λ^α pour tout $\alpha < \gamma$. Si $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu sur Λ^γ, h est dans $\mathcal{C}_\gamma$.

Ce théorème répond donc presque complètement à la question. Il nous permet également de voir que si $V_h H V_{h^{-1}}$ est continu sur Λ^α, il l'est sur $\Lambda_{\alpha'}$ pour tout $\alpha' <$

Démonstration du théorème 5.

Montrons d'abord la première implication. Supposons que g soit dans $\mathcal{C}_\gamma$; et soit $\alpha < \gamma$. Soit $f \in \mathcal{C}_o^\infty(\mathbb{R})$. On pose $T = V_g \circ H \circ V_{g^{-1}}$

$$T f(x) = H\left[f \circ g^{-1}\right](g(x)) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|y-g(x)|>\varepsilon} \frac{f \circ g^{-1}(y)}{y - g(x)}\, dy.$$

Cette limite existe p. p. car $g'(x) \neq 0$ p. p.

Soit I un intervalle contenant g(x) et g(x'), où x et x' sont deux réels quelconques. On peut écrire $T f(x) - T f(x')$ comme somme de trois termes que l'on majorera en supposant $\|f\|_{\Lambda_\alpha} < 1$.

1er terme
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\substack{|y-g(x)|>\varepsilon \\ y \in I}} \left(\frac{f \circ g^{-1}(y)}{g(x)-y}\right) dy$$

2ème terme
$$- \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\substack{|y-g(x')|>\varepsilon \\ y \in I}} \left(\frac{f \circ g^{-1}(y)}{g(x')-y}\right) dy$$

3ème terme
$$\left[g(x') - g(x)\right] \int_{y \notin I} \frac{f \circ g^{-1}(y)}{(g(x)-y)(g(x')-y)}\, dy.$$

Comme le remarque Yves Meyer dans ([2]), on ne change pas la définition de $T f(x) - T f(x')$ en retirant f(x) à f.

x et x' étant maintenant fixés, on note $\mu = |x-x'|$ et $\delta = |g(x) - g(x')|$; $I = \{y \in \mathbb{R} , |y-g(x')| \leq 10\, \delta\}$.

Premier terme. Soit $\lambda = \dfrac{g(x) - y}{g(x) - g(x')}$. $|\lambda| < 11$ car $y \in I$.

$\exists\, \gamma'$ et C' tels que $|x - g^{-1}(y)| \leq C' |\lambda|^{\gamma'} |x-x'|$; d'où :

$$\|f\|_{\Lambda_\alpha} < 1 \Longrightarrow |f \circ g^{-1}(y) - f(x)| \leq C'^{\alpha} |\lambda|^{\alpha\gamma'} \mu^{\alpha}.$$

En prenant λ comme nouvelle variable, on majore le premier terme

$\int_{|\lambda|<11} C'^{\alpha} |\lambda|^{\alpha\gamma'} \mu^{\alpha} \frac{d\lambda}{\lambda} \leq C'' \mu^{\alpha}$, C'' dépendant de C, α et γ.

Deuxième terme. I étant centré en $g(x')$, on peut soustraire la constante $f(x')$ à $f \circ g^{-1}(y)$ et obtenir le même majorant $C'' \mu^{\alpha}$.

Troisième terme. λ, toujours égal à $\frac{y - g(x)}{g(x') - g(x)}$ vérifie maintenant $|\lambda| \geq 9$

$$\frac{g(x') - g(x)}{y - g(x)} \leq C \left(\frac{x' - x}{g^{-1}(y) - x} \right)^{\gamma} \Longrightarrow |g^{-1}(y) - x| \leq C^{1/\gamma} \lambda^{1/\gamma} \mu$$

$$\Longrightarrow |f \circ g^{-1}(y)| \leq C^{\alpha/\gamma} \lambda^{\alpha/\gamma} \mu^{\alpha}.$$

Le 3ème terme se majore donc par

$$\int_{|\lambda|>9} C^{\alpha/\gamma} . \mu^{\alpha} \frac{\lambda^{\alpha/\gamma}}{\lambda(\lambda-1)} d\lambda \leq C''' \mu^{\alpha} \qquad \text{car} \quad \frac{\alpha}{\gamma} < 1.$$

Il est immédiat de voir que la définition de Tf, à une constante additive près, est indépendante du choix de I. Nous avons donc une définition cohérente de Tf sous la seule hypothèse $f \in \Lambda^{\alpha}$, et sa continuité sur Λ^{α}.

La première implication est démontrée. On voit d'ailleurs que seule la majoration du troisième terme fait appel à l'hypothèse $g \in \mathcal{C}_{\gamma}$ pour $\gamma \geq \alpha$, les deux autres n'utilisant que $(h \in \mathcal{G}')$. Ceci nous suggère le plan de la démonstration de la seconde implication. Dans un premier temps nous testerons T sur une fonction constante à l'infini pour montrer que h est dans $\mathcal{G}'$. Dans un second temps, nous pourrons nous concentrer sur le troisième terme pour montrer que $g \in \mathcal{C}_{\alpha}$.

Supposons que $g \notin \mathcal{G}'$. Il est alors facile de voir que :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall\, (x,x') \in \mathbb{R}^2 \ / \ \frac{g(\frac{x+x'}{2}) - g(x)}{g(x') - g(x)} < \varepsilon. \qquad \text{(Supposons } x < x'\text{)}.$$

Soit f définie par $\begin{cases} f(u) = 0 & \text{si } u \le x \\ f(u) = (u-x)^\alpha & \text{si } u \le \frac{x+x'}{2} \\ f(u) = (\frac{x'-x}{2})^\alpha & \text{si } u \ge \frac{x+x'}{2} . \end{cases}$

f étant dans L^∞ et $\|f\|_{\Lambda_\alpha}$ étant plus petit que 1, nous pouvons calculer $Tf(x') - Tf(x)$ comme précédemment.

Le premier terme peut être minoré, ε étant fixé, par :

$$\int_{g(x')\ge y\ge g(\frac{x+x'}{2})} (\frac{x'-x}{2})^\alpha \frac{dy}{|g(x)-y|} \ge (\frac{x'-x}{2})^\alpha \left|\log \varepsilon\right| .$$

Le deuxième terme peut être majoré par :

$$\int_{g(x')-10\delta\le y\le g(\frac{x+x'}{2})} (\frac{x'-x}{2})^\alpha \frac{dy}{|g(x')-y|} \le (\frac{x'-x}{2})^\alpha \left|\log \frac{1-\varepsilon}{10}\right| .$$

Le troisième terme peut être majoré par :

$$\int_{y>g(x')+10\delta} (\frac{x'-x}{2})^\alpha \frac{|g(x)-g(x')|}{|y-g(x)|\,.\,|y-g(x')|} dy \le K(\frac{x'-x}{2})^\alpha .$$

En faisant tendre ε vers 0, on voit qu'il y a contradiction à supposer $g \notin \mathcal{G}'$. On suppose maintenant que $g \in \mathcal{G}'$ et on va tester T sur la fonction f définie par :

$f(u) = 0$ si $u \le x$

$f(u) = (u-x)^\alpha$ si $u \le x + n(x'-x)$

$f(u) = n^\alpha$ si $u \ge x + n(x' - x)$.

f est dans L^∞ et $\|f\|_{\Lambda_\alpha} \le 1$. g étant dans $\mathcal{G}'$, les deux premiers termes se majorent comme dans la démonstration de la première implication. Le troisième doit être majoré indépendamment de n par une expression $C(x-x')^\alpha$.

On doit donc avoir :

$$\int_{y\ge g(x')+10\delta} \frac{|g(x)-g(x')|}{(y-g(x))(y-g(x'))} .(g^{-1}(y)-x)^\alpha dy \le C(x-x')^\alpha,$$

d'où pour tout $y \geq g(x') + 10\,\delta$

$$\int_{z \geq y} \frac{g(x) - g(x')}{(z - g(x'))^2} (g^{-1}(y) - x)^{\alpha}\, dz \leq C(x-x')^{\alpha}$$

soit :

$$\frac{g(x) - g(x')}{y - g(x')} \leq C \frac{(x-x')^{\alpha}}{(g^{-1}(y) - x)}.$$

g étant supposé dans $\mathcal{G}'$, on peut lever la restriction sur y quitte à changer C. g est donc dans $\mathcal{C}_{\alpha}$.

Le théorème 5 est donc démontré.

Pour conclure, signalons qu'il existe une condition suffisante de continuité de $V_h H V_{h^{-1}}$ sur Λ^{α} plus faible que $\{\exists\ \gamma > \alpha\ /\ h \in \mathcal{C}_{\gamma}\}$.

Soit f définie sur $]0,1[$ par :

$$f(x) = \sup \left\{ \frac{|g(J)|}{|g(I)|} \text{ pour } J < I \text{ et } \frac{|J|}{|I|} \leq x \right\}.$$

Si $g \in \mathcal{G}'$, f est un homéomorphisme $]0,1[$ sur lui-même. La condition peut alors s'exprimer par :

$$\int_0^1 [f^{-1}(\lambda)]^{-\alpha}\, d\lambda < +\infty.$$

Deuxième partie

UNE APPLICATION DU THEOREME DE CALDERÓN.

R. Coifman et Yves Meyer ont signalé dans [3] que le théorème de Calderon pour les courbes corde-arc avec petite constante impliquait l'analyticité de l'opérateur $U_h H U_{h^{-1}}$ comme fonction de $\log h' = \beta$ dans une boule $\|\beta\|_* < \gamma$, à valeurs dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$. Citons exactement leur théorème.

THEOREME C. M. : Il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $C > 0$ et une suite d'opérateurs multilinéaires symétriques continus T_k définis de $(BMO)^k$ dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ et vérifiant :

(i) $T_o = H$

(ii) $\forall\, b \in BMO$, $\|T_k(b, b, \ldots, b)\| \leq C^k \|b\|_*^k$

(iii) $\|\log h'\|_* < \gamma \Longrightarrow h \in \mathcal{G}$ et

$$U_h H U_{h^{-1}} = \sum_{o}^{+\infty} T_k(\log h', \log h', \ldots, \log h').$$

Après avoir constaté que la transformée de Hilbert et l'identité sont les deux seuls opérateurs T continus sur L^2 vérifiant $(\forall\, h \in \mathcal{G} : \|\log h'\|_* = 0 \Longrightarrow U_h T U_h^{-1} = T)$, on voit qu'il est nécessaire, pour agrandir la classe d'opérateurs pour lesquels on voudrait un résultat d'analyticité, de restreindre la condition $(\|\log h'\|_* = 0 \Longrightarrow U_h T U_{h^{-1}} = T)$. On tombe alors naturellement sur les multiplicateurs continus sur L^2 qui sont les seuls à vérifier : $(\|\log h'\|_\infty = 0 \Longrightarrow U_h T U_h^{-1} = T)$. Il reste à sélectionner ceux qui vérifient la condition d'analyticité suivante (notée $\mathcal{A}$) :

$\mathcal{ct}$ Il existe deux constantes $\gamma > 0$ et $C > 0$ et une suite d'opérateurs multilinéaires symétriques continus T_k définis de $(L^\infty)^k$ dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ et vérifiant :

(i) $T_o = T$

(ii) $\forall\, b \in L^\infty \qquad \|T_k(b, b, \ldots b)\| \leq \frac{C}{\gamma^k} \|b\|_\infty^k$

(iii) $\|\log h'\|_\infty < \gamma \Longrightarrow$

$$V_h T V_{h^{-1}} = \sum_o^{+\infty} T_k(\log h', \ldots, \log h').$$

Deux remarques. a) Remplacer U_h par V_h n'a d'autre effet que de simplifier puisque l'opérateur de multiplication par h' ou $\frac{1}{h'}$ est une fonction analytique de $\log h'$ dans L^∞.

b) La condition $\mathcal{ct}$ qui est apparemment une condition d'analyticité à l'origine entraîne une condition d'analyticité globale en vertu des deux faits suivants :

α) $V_h T V_{h^{-1}} = V_{h_o} (V_{hh_o^{-1}} T V_{hh_o^{-1}}) V_{h_o^{-1}}$.

β) L'application qui à $\operatorname{Log} h'$ associe $\log(h \circ h_o^{-1})'$ est analytique de L^∞ dans L^∞ pour tout $h_o \in \mathcal{H}_o$ vérifiant : $\log h_o' \in L^\infty$.

Le problème de sélection qui se pose va être très simplifié par le fait suivant : la condition nécessaire qui découle naturellement de l'hypothèse d'analyticité restreinte au cas où $\log h'$ est constant, est également suffisante.

Nous allons donc montrer la proposition et le théorème suivants :

PROPOSITION 1. Soit m une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}^n - \{0\}$ et T le multiplicateur associé. Si $V_h T V_{h^{-1}}$ est une fonction analytique de h' dans la boule $\{\|h' - I_n\|_\infty < \varepsilon\}$, ε étant arbitrairement petit, alors m se prolonge en une fonction analytique sur un ouvert du type : $\{(z_1 \ldots z_n) \in \mathbb{C}^n / |\operatorname{Im} z| < C |\operatorname{Re} z|\}$.

Notons que, quel que soit n, remplacer h' par $\log h'$ ne change rien

car l'exponentielle est bi-analytique à l'origine dans $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{C})$.

THEOREME 1. Soit m une fonction bornée définie sur $\mathbb{R}^*$ et T le multiplicateur associé. Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

j) T vérifie la propriété $\mathcal{A}$

jj) m est la restriction à $\mathbb{R}$ d'une fonction analytique bornée définie dans un secteur $\{|\mathrm{Im}\, z| < \alpha |\mathrm{Re}\, z|\}$.

La proposition 1 entraîne évidemment (j) $\Longrightarrow$ jj)).

Démonstration de la proposition 1.

On suppose seulement que $V_h T V_{h^{-1}}$, restreinte aux homéomorphismes linéaires, est une fonction analytique de h' dans la boule $\{\|h' - I_n\| < \varepsilon\}$. En utilisant les formules de commutation entre les transformations linéaires et la transformation de Fourier, il est facile de voir que cette hypothèse est équivalente à la suivante :

$V_h M V_{h^{-1}}$, restreinte aux homéomorphismes linéaires, est une fonction analytique de h' dans la boule $\{\|h' - I_n\| < \varepsilon\}$.

M désigne ici la multiplication par la fonction m. $V_h M V_{h^{-1}}$ est donc la multiplication par $V_h(m)$.

Nous allons maintenant montrer que les dérivées successives de m, prises au sens des distributions, sont des fonctions sur l'ouvert $\mathbb{R}^n - \{0\}$. En appliquant un théorème de Schwartz démontré dans [15], on en concluera que m est presque partout égale à une fonction C^∞ sur l'ouvert $\mathbb{R}^n - \{0\}$.

φ_o désigne une fonction définie sur $\mathbb{R}^n$, strictement positive et C^∞ à décroissance rapide (on note $\varphi_o \in \mathcal{S}_+$).

X désigne un point de $\mathbb{R}^n$ distinct de l'origine $(X_1, \ldots, X_n)$ et φ une fonction C_c^∞ dont le support contient X et est contenu dans la boule notée B_X de centre X et de rayon $\frac{1}{2} \operatorname{Sup}_i \{|X_i|\}$.

Soit i tel que $|X_i| = \sup_j \{|X_j|\}$. $(x_i)^p$ ne s'annulant pas dans B_X, il nous suffit de montrer que, au sens des distributions, les dérivées p-ièmes de $m.(x_i)^p$ sont égales, au voisinage de X, à des fonctions, et ceci pour tout p.

Appelons $((a_{ij}))$ la matrice de h. Il est facile de voir que :

$$\frac{\partial}{\partial a_{ij}} \varphi(h(x)) = x_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(h(x)) ,$$

d'où

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x).(x_i)^p \frac{\partial^p \varphi}{\partial x_{j_1} \dots \partial x_{j_p}}(x)\, dx = \frac{\partial^p}{\partial a_{ij_1} \dots \partial a_{ij_p}} \left[\int_{\mathbb{R}^n} m(x)\, \varphi(h(x))\, dx \right]$$

le second membre étant calculé en $h = I_{\mathbb{R}^n}$.

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x)\, \varphi(h(x))\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} m(h^{-1}(y)) \varphi(y) \frac{dy}{|\det h|}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_o(y)\, m(h^{-1}(y)) \frac{\varphi}{\varphi_o}(y) \frac{dy}{\det h}$$

φ_o étant dans L^2, la forme linéaire définie sur L^2 par

$$\left(f \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_o(y)\, m(h^{-1}(y))\, f(y) \frac{dy}{\det h} \right) ,$$

dépend analytiquement de h' dans $\{ h / \|h' - I_n\| < \varepsilon \}$.

On en déduit l'existence d'une fonction $\varphi_{i,j_1 \dots j_p}$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ telle que

$$\frac{\partial^p}{\partial a_{ij_1} \dots \partial a_{ij_p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \varphi_o(y)\, m(h^{-1}(y))\, f(y) \frac{dy}{\det h} \right)_{(h = I_{\mathbb{R}^n})}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{i,j_1 \dots j_p}(y)\, f(y)\, dy.$$

D'où $\dfrac{\partial^p}{\partial a_{ij_1} \dots \partial a_{ij_p}} \left[\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} m(x)\, \varphi(h(x))\, dx \right]$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi_{i,j_1, \dots j_p}(y) \frac{\varphi(y)}{\varphi_o(y)}\, dy.$$

Finalement, au signe près, la dérivée de $m(x).(x_i)$ par rapport à

$(x_{j_1}, \ldots, x_{j_p})$ est égale à $\varphi_o^{-1}.\varphi_{i,j_1\ldots j_p}$. m est donc p. p. égale à une fonction C^∞ définie sur $R^n - \{0\}$.

Pour montrer que m est analytique réelle et se prolonge en une fonction analytique bornée définie dans un cône de $\mathbb{C}^n$ du type $\{(z_1\ldots z_n)\in C^n / |\text{Im } z| < C|\text{Re } z|\}$, il suffit de prouver l'existence d'une constante C telle que, pour tout système d'indices $(i_1,\ldots i_p, j_1,\ldots j_p)$ on ait : $\| x_{i_1}\cdots x_{i_p} \frac{\partial}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_p}} m\|_\infty \le C^p\, p!$. En effet, le rayon de convergence de la série de Taylor au point $(x_1,\ldots x_n)$ sera alors de l'ordre de grandeur de $(|x_1|+|x_2|+\ldots|x_n|)$.

Appliquons maintenant l'analyticité par rapport à h' de l'opérateur de multiplication par $V_h(m)$:

$$\exists\, C>0 \,/\, \forall\, \varphi_o \in \mathcal{S}_+ : \forall\, \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n) \quad \text{avec} \quad 0 \notin \text{Supp}\,\varphi$$

$$\left| \frac{\partial^p}{\partial a_{i_1 j_1}\ldots\partial a_{i_p j_p}} \int_{\mathbb{R}^n} m(h(x))\,\varphi_o(x).\varphi(x)\,dx \right| \le p\,!\; C^p \|\varphi_o\|_2\, \|\varphi\|_2 .$$

Le membre de gauche est calculé en $h = I_{\mathbb{R}^n}$. m étant C^∞, on peut inverse $\int$ et ∂, d'où

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} (x_{i_1}\ldots x_{i_p}) \left(\frac{\partial^p}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_p}} m \right) \varphi_o.\varphi\, dx \right| \le p!\; C^p \|\varphi_o\|_2\, \|\varphi\|_2 .$$

On en déduit immédiatement la majoration cherchée et la proposition 1 se trouve démontrée.

Comme on a pu le remarquer, on ne fait pas de restriction sur la dimension de l'espace pour la proposition 1, alors que dans le théorème 1 on suppose cette dimension égale à 1. Ceci découle de la technique de démonstration employée pour ce théorème. En effet, alors que pour le théorème C. M., Coifman et Meyer calculent par récurrence les opérateurs T_k et majorent leurs "normes" par une technique de variable réelle ici nous allons profiter de l'existence d'un prolongement analytique complexe explicite et montrer l'analyticité de l'opérateur par une méthode utilisant le théorème de Morera Signalons toutefois que Coifman a pu généraliser notre théorème 1 en dimension n.

Démonstration du théorème 1.

Compte tenu de la proposition 1, il ne nous reste qu'à montrer (jj $\Rightarrow$ j). Soit donc m une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, restriction à $\mathbb{R}^*$ d'une fonction analytique bornée définie sur le secteur $S_\alpha : \{\xi \in \mathbb{C} / |\text{Im } \xi| < \alpha |\text{Re } \xi|\}$. Nous allons supposer également que $e^{-\xi^2}$ est bornée sur ce secteur de façon à pouvoir, une fois le théorème démontré en remplaçant $m(\xi)$ par $m(\xi)\, e^{-\eta \xi^2}$ $(\eta > 0)$, appliquer un argument de passage à la limite. En d'autres termes, on suppose $\alpha < 1$; ce qui ne restreint rien du tout. Il existe donc une constante C_α telle que, sur le secteur S_α, on ait $|e^{-\xi^2}| < e^{-C_\alpha |\xi|^2}$. On suppose en outre, quitte à remplacer $m(\xi)$ par $m(\xi)\, e^{-\eta \xi^2}$, l'existence de deux constantes C et η telles que on ait :

(H) $$\forall\, \xi \in S_\alpha \qquad |m(\xi)| < C\, |e^{-\eta \xi^2}|.$$

Une conséquence de cette hypothèse (H) est la possibilité d'écrire le multiplicateur défini par m comme l'opérateur de convolution avec $\check{m}$ qui se trouve alors être une fonction C^∞ et dans $L^2(\mathbb{R})$. Soit donc $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \quad : \quad Tf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{m}(x-y)\, f(y)\, dy.$$

Soit $h \in \mathcal{H}_o$ tel que $\|\log h'\|_\infty < +\infty$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \qquad T\, V_{h^{-1}}\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{m}(x-y)\, f(h^{-1}(y))\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \check{m}(x-h(y))\, f(y)\, h'(y)\, dy$$

et $$V_h\, T\, V_{h^{-1}}\, f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \check{m}(h(x) - h(y))\, f(y)\, h'(y)\, dy.$$

Pour donner l'expression d'un prolongement analytique, il faut donner un sens, lorsque $\log h'$ est à valeurs complexes, à cette formule définie pour $\log h'$ réelle. A cette fin, nous allons faire quelques rappels sans démonstration sur la transformée de Laplace. On appelle H_α l'ensemble des fonctions analytiques bornées définies sur S_α et vérifiant (H).

RAPPEL T. L. 1. Soit $m \in H_\alpha$. On définit S par :

$$S(z) = \int_{\xi \in \mathbb{R}} \exp(-2i\pi z\xi)\, m(\xi)\, d\xi .$$

S est parfaitement définie sur $S_{\alpha/2}$, où elle est holomorphe et bornée. D'autre part elle y vérifie une majoration $|S(z)| < \frac{C'}{|z|}$, C' ne dépendant que de C et α.

L'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} S(h(x) - h(y))\, f(y)\, h'(y)\, dy$ est donc définie même si h' est à valeurs complexes, pourvu que $\|\log h'\|_\infty$ soit suffisamment petit. Le point important est maintenant de montrer la continuité $-L^2$ de l'opérateur $V_h\, T\, V_{h^{-1}}$ lorsque log h' est complexe ; plus précisément :

LEMME 1. Soit $m \in H_\alpha$ $\exists\, \delta > 0$ et $\exists\, C_o > 0$ ne dépendant que de α et $\|m\|_\infty$ telles que : $\|\log h'\|_{L^\infty(\mathbb{C})} < \delta \Longrightarrow \|V_h\, T\, V_{h^{-1}}\| < C_o$.

Démonstration du lemme 1.

Cette démonstration utilise deux résultats profonds. Nous devons toutefois commencer par une astuce de calcul inspirée par le résultat suivant sur la transformée de Laplace :

RAPPEL T. L. 2. Soit $m \in H_\alpha$; on définit m_1 et m_2 par $m_1 = m \times \{z/\mathrm{Re}\ z > 0\}$ et $m_2 = m - m_1$. m_1 et m_2 sont dans H_α et on peut leur associer deux fonctions S_1 et S_2 en utilisant le rappel T. L. 1 : S_1 (resp. S_2) se prolonge en une fonction holomorphe et bornée définie sur le cône $\{z \in \mathbb{C} /\ \mathrm{Im}\ z < \frac{\alpha}{2} |\mathrm{Re}\ z|\}$ (resp. $\{\mathrm{Im}\ z > -\frac{\alpha}{2} |\mathrm{Re}\ z|\}$). D'autre part, elle y vérifie une majoration $|S(z)| < \frac{C'}{|z|}$, C' ne dépendant que de C et α.

Il suffit donc de montrer le lemme 1 en remplaçant m par m_1. S désignera alors S_1. On suppose δ suffisamment petit pour que l'on puisse appliquer le théorème de Calderón à la courbe Γ_h paramétrée par $t \in \mathbb{R}$ et $t \longrightarrow h(t)$. Il existe alors une constante K, ne dépendant que de δ, telle que :

$\forall f \in L^2(\mathbb{R})$, $\exists f_1 \in H_2^+(\Gamma_h)$, $\exists f_2 \in H_2^-(\Gamma_h)$ /

i) $f = f_1 \circ h + f_2 \circ h$ dans L^2

ii) $\|f_1\| + \|f_2\| < K\|f\|_2$, les normes de f_1 et f_2 étant calculées respectivement dans H_2^+ et $H_2^-(\Gamma)$. Pour majorer $\left\|\int_{\mathbb{R}} S(h(.) - h(y))\, f(y)\, h'(y)\, dy\right\|_2$ par une expression du type $C_o\|f\|_2$, il nous suffit de majorer $\left\|\int_{\Gamma_h} S(h(.)-z)\, f_j(z)\, dz\right\|_2$ ($j \in \{1,2\}$) par une expression du même type.

En fait pour $j = 1$, cette expression est nulle. Pour le voir on translate la courbe "vers le bas" et on l'envoie à l'infini. Précisément, nous allons successivement montrer :

(1) $\forall\, \eta \in \mathbb{R}_+ \quad \int_{\Gamma_h} S(h(x)-z)\, f_1(z)\, dz = \int_{\Gamma_h} S(h(x)-z-i\eta)\, f_1(z+i\eta)\, dz$

(2) $\lim_{\eta \to +\infty} \int_{\Gamma_h} S(h(x) - z - i\eta) f_1(z + i\eta)\, dz = 0.$

Il est immédiat que, ω désignant $+\infty$ ou $-\infty$, (1) est entraîné par $\lim_{y \to \omega} \int_o^\eta S(z(x) - z(y) - it)\, f_1(z(y) + it)\, dt = 0$. Or cette dernière égalité découle de la majoration $|S(z)| < \frac{C'}{|z|}$ et du résultat suivant dû à Kenig (cf. [11]).

LEMME K. $\forall K > 0$, $\exists C > 0$ <u>telle que : si</u> Γ <u>est le graphe d'une fonction</u> φ <u>de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans</u> $\mathbb{R}$ <u>K-lipschitzienne, si</u> f <u>est dans</u> $H_2^+(\Gamma)$ <u>et si</u> $M(f)$ <u>est définie de</u> $\mathbb{R}$ <u>dans</u> $\mathbb{R}_+$ <u>par</u>

$$M(f)(x) = \sup_{t \in \mathbb{R}_+}{}^{*} |f(x + i\varphi(x) + it)|$$

<u>alors</u> :

$$M(f) \in L^2(\mathbb{R}) \text{ } \underline{\text{et}} \text{ } \|M(f)\|_2 \leq C\|f\|_{H_2^+(\Gamma)}.$$

On conclut en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

La nullité de $\lim_{\eta \to +\infty} \int_{\Gamma_h} |S(z(x) - z - i\eta|^2\, |dz|$ découle également de la majoration $|S(z)| < \frac{C'}{|z|}$ (via le théorème de convergence dominée). On en déduit (2) en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la majoration uniforme de

$\|f_1(. + i\eta)\|_{L^2(\Gamma)}$ par $\|f_1\|_{H_2^+(\Gamma)}$.

Pour avoir le lemme 1 il suffit d'appliquer le lemme suivant à la majoration de $\|\int_{\Gamma_h} S(h(.) - z)\, f_2(z)\, dz\|_2$.

LEMME 2. $\exists\, M > 0$ $\exists\, C > 0$ tels que :

si S est une fonction analytique bornée définie dans $\{z \in \mathbb{C} / \text{Im } z < M |\text{Re } z|\}$ et y vérifie $|S(z)| < \frac{C'}{|z|}$,

si Γ est le graphe d'une fonction M-lipschitzienne,

si $S_o(f)$ est défini pour z_o au-dessous de Γ par

$$S_o(f)(z_o) = \int_\Gamma S(z_o - z)\, f(z)\, dz ,$$

alors S_o est continu de $H_2^-(\Gamma)$ dans $H_2^-(\Gamma)$ et $\|S_o\| < CC'$.

Démonstration du lemme 2.

Cette démonstration s'inspire des techniques introduites par Coifman et Meyer dans [4]. Elle s'appuie également sur un résultat de Kenig se trouvant dans ([11]) et que nous allons énoncer en gardant les notations du lemme 2. Si f est analytique au dessous de Γ et si z est sur Γ, on définit $S_2 f(z)$ par

$$S_2 f(z) = \left[\int_o^{+\infty} t^3 |f''(z - it)|^2\, dt\right]^{1/2}$$

et $S_1 f(z)$ par

$$S_1 f(z) = \left[\iint_{y_2 > M|y_1|} |f'(z - y_1 - iy_2)|^2\, dy_1\, dy_2\right]^{1/2} .$$

On a alors le :

THEOREME K. Si f est analytique au dessous de Γ :

$$f \in H_2^-(\Gamma) \iff S_1 f \in L^2(\Gamma) \iff S_2 f \in L^2(\Gamma).$$

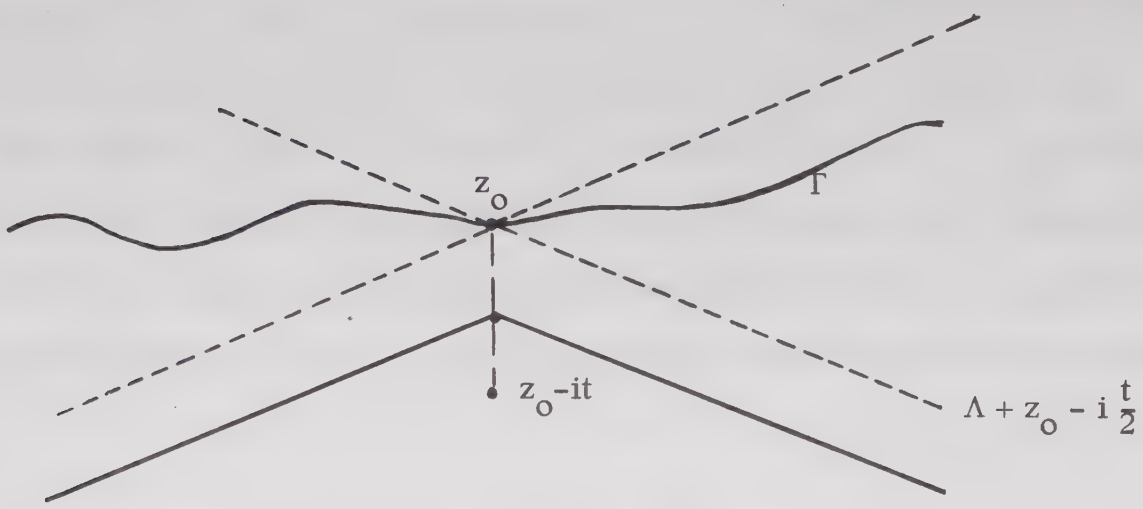
De plus les normes des trois fonctions sont équivalentes avec des constantes ne dépendant que de M.

Il suffit donc, puisque $S_o f$ est analytique au dessous de Γ, de montrer une

inégalité du type $\|S_2\, S_o f\| \le CC' \|S_1 f\|$ pour obtenir le lemme 2. En fait, nous aurons une inégalité ponctuelle

$$[S_2\, S_o f](z_o) \le C.C'\, [S_1 f](z_o).$$

Commençons par déplacer le contour Γ qui sert à calculer $S_o(f)$. Soit Λ la courbe de $\mathbb{C}$ définie par $z \in \Lambda$ ssi $\operatorname{Im} z = -M |\operatorname{Re} z|$.



$$S_o(f)(z_o - it) = \int_{\Lambda + z_o - i\frac{t}{2}} S(z_o - it - z)\, f(z)\, dz.$$

Ce changement de contour se justifie exactement comme l'égalité (1), en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, le lemme K et l'estimation $|S(z)| \le \frac{C'}{|z|}$. D'autre part, $|S'(z)| \le \frac{C''}{|z|^2}$ et $|S''(z)| \le \frac{C'''}{|z|^3}$. On peut donc dériver $S_o(f)$ en dérivant sous le signe $\int$. Une intégration par partie nous donne finalement : $[S_o(f)]''(z_o - it) = \int_{\Lambda + z_o - \frac{it}{2}} S'(z_o - it - z)\, f'(z)\, dz$. Notons pour justifier complètement cette égalité que son second membre est une intégrale absolument convergente, f' et $S'(z_o - it - .)$ étant tous deux dans $L^2(\Lambda + z_o - \frac{it}{2})$, et que $\liminf [S'(z_o - it - z)\, f(z)] = 0$ lorsque z tend vers l'un des deux points à l'infini de $\Lambda + z_o - \frac{it}{2}$.

Reportons l'égalité ci-dessus dans le calcul de $S_2 S_o f(z_o)$ et utilisons l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|S_2 S_o f(z_o)| \leq \int_{t\in\mathbb{R}_+} t^3 \left[\int_{\Lambda+z_o-\frac{it}{2}} |S'(z_o-it-z)|^2 |dz|\right]\left[\int_{\Lambda+z_o-\frac{it}{2}} |f'(z)|^2 |dz|\right] dt .$$

Le premier terme se majore par $C_M \frac{C''}{t^3}$ et en intégrant le second par rapport à t on balaye précisément le cône $\{z-(y_1+iy_2),\ y_2 > M|y_1|\}$. On tombe donc sur la majoration ponctuelle désirée. C'' étant proportionnel à C', on a bien une estimation $\|S_o\| < CC'$, C ne dépendant que de M. Le lemme 1 et le lemme 2 sont complètement démontrés.

La deuxième étape de la démonstration du théorème 1 consiste, toujours en supposant que m vérifie l'hypthèse H, à montrer l'existence des opérateurs T_k de la propriété $\mathcal{A}$. En fait il revient au même de montrer l'existence de formes U_k multilinéaires, continues, symétriques par rapport aux k premières variables, définies sur $(L^\infty)^k \times (L^2)^2$ et vérifiant, δ et C_o étant fixés par le lemme 1 :

i) $U_o(f,\bar{g}) = (Tf,g)$

ii) $\forall\, k\in\mathbb{N}$, $\forall\, b\in L^\infty$, $\forall\,(f,g)\in(L^2)^2$:

$$|U_k(b, b, \ldots b, f, \bar{g})| \leq \frac{1}{2\pi}\frac{C_o}{\delta^k}\|b\|^k \|f\|_2 \|g\|_2$$

iii) $\|\log h'\|_\infty < \delta \Longrightarrow \forall\,(f,g)\in(L^2)^2$:

$$(V_h\, T\, V_{h^{-1}}(f)\,|\,\bar{g}) = \sum_{k=0}^{+\infty} U_k(\log h', \ldots, \log h', f, \bar{g}).$$

Il suffit bien sûr de montrer l'existence des U_k en supposant f et g C^∞ à support compact. Notons alors $A_{f,g}(h) = (V_h\, T\, V_{h^{-1}}(f)\,|\,\bar{g})$

$$A_{f,g}(h) = \iint_{x\,y} f(y)\, S(h(x)-h(y))\, \bar{g}(x)\, h'(y)\, dx\, dy.$$

S restant borné sur $\{h(\mathrm{supp}\ g) - h(\mathrm{supp}\ f)\}$, l'application $A_{f,g}(\exp\int .)$ est uniformément continue dans la boule $B_\delta = \{u\in L^\infty,\ \|u\|_\infty < \delta\}$. Cette propriété, jointe à la propriété d'analyticité séparée que nous allons maintenant montrer, nous donnera une propriété d'analyticité globale, grâce au lemme 3 de la page 50 .

Soient h_1 et h_2 des éléments de $\mathcal{H}_o$ tels que $u_1 = \log h_1' \in B_\delta$ et $u_2 = \log h_2' \in L^\infty$, soit O l'ouvert convexe de $\mathbb{C}$ défini par

$(\lambda \in O \iff u_1 + \lambda u_2 \in B_\delta)$ et soit Γ un lacet de O.

On suppose $\lambda \in O$. x et y étant fixés, $\int_x^y e^{u_1+\lambda u_2}\, dv$ est holomorphe en λ. S étant holomorphe, le théorème de Fubini permet d'écrire :

$$\int_\Gamma \left[\iint f(y)\, S\Big(\int_y^x e^{u_1+\lambda u_2}\, dv \Big)\, e^{u_1+\lambda u_2}\, \bar{g}(x)(u_1+\lambda u_2)\, dx\, dy \right] d\lambda = 0 ,$$

soit : $\int_\Gamma A_{f,g}(\exp \int u_1 + \lambda u_2)\, dt = 0$. On en déduit l'existence de fonctions $X_k(u_1, .)$ définies de L^∞ dans $\mathbb{R}$ et telles que, si $u_1 + \lambda u_2 \in B_\delta$:

$$A_{fg}(\exp \int u_1 + \lambda u_2) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k X_k(u_1, u_2) \qquad (1).$$

Les U_k sont alors automatiquement reliées aux X_k par la formule $U_k(\log h', \ldots \log h', f, g) = X_k(O, \log h')$. La linéarité des U_k par rapport à f et g ainsi que (i) et (iii) sont donc immédiats tandis que (ii) est une simple conséquence du lemme 1 et de la formule de Cauchy. Le seul problème reste donc de montrer la linéarité des U_k par rapport aux premières variables. Nous l'aurons comme conséquence du lemme suivant que nous démontrerons en appendice.

LEMME 3. Soit F une application bornée d'un ouvert Ω d'un espace de Banach B dans $\mathbb{C}$ vérifiant : $\forall x \in \Omega$, $\forall y \in B$, il existe une suite de fonctions X_k définies de B^2 dans $\mathbb{C}$ telles que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| < \frac{1}{|y|}\, d(x, \complement_B \Omega) : F(x + \lambda y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k X_k(x, y).$$

Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall x \in \Omega$, $X_k(x, .)$ est la restriction à la diagonale de B^k d'une forme k-linéaire symétrique continue.

Les conditions d'application de ce lemme sont ici remplies en vertu du lemme 1 et de l'égalité 1.

Modulo le lemme 3, le théorème 1 est démontré dans le cas où m vérifie l'hypothèse (H).

Supposons maintenant m quelconque vérifiant les hypothèses du théorème 1.

Remarquons qu'on peut alors appliquer le théorème à m_η (défini par $m_\eta(\xi) = m(\xi)\, e^{-\eta\xi^2}$) avec des constantes C et γ égales à $2\pi C_o$ et δ.

Appelons T_η $(\eta > 0)$ le multiplicateur associé à m_η. T est, au sens de la topologie faible des opérateurs, la limite de T_η. Soient en effet $(f,g) \in (L^2)^2$

$$(\bar f \mid Tg) = (\bar{\hat f} \mid \hat{Tg}) = (\bar{\hat f} \mid m\, \hat g) = \lim_{\eta\to 0} (\bar{\hat f} \mid m_\eta\, \hat g) = \lim_{\eta\to 0} (\bar f \mid T_\eta\, g).$$

Fixons $h \in \mathcal{H}_o$ tel que $\log h' = b \in B_\delta$. Le théorème 1 appliqué à m_η nous donne l'existence d'opérateurs de L^2 noté $Z_k[\eta]$ et définis par $Z_k[\eta] = (T_\eta)_k(b, \ldots, b)$. Ces opérateurs vérifient les estimations uniformes suivantes : $(\|Z_k[\eta]\| < 2\pi C_o (\frac{\|b\|_\infty}{\delta})^k)$. Nous pouvons donc utiliser la compacité faible de $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))'$ pour montrer l'existence d'une suite Z_k d'opérateurs de L^2 vérifiant les mêmes estimations et la propriété suivante :

$\forall\, t \in]-1,1[\quad V_{h_t}\, T\, V_{h_t^{-1}} = \sum_{k\in N} t^k Z_k$, h_t étant défini par $h_t(x) = h(0) + \int_o^x (h')^t\, du$

Soit $(\eta_n \quad n\in\mathbb{N})$ une suite tendant vers 0 telle que : $\forall\, k\in N$, $\lim_{n\to+\infty} Z_k[\eta_n]$ existe. Notons L_k cette limite.

$$\forall\, t \in]-1,1[,\ \forall\, n\in N,\quad V_{h_t}\, T_{\eta_n}\, V_{h_t^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k Z_k[\eta_n].$$

Les estimations sur les $Z_k[\eta_n]$ nous permettent de passer à la limite sous le signe Σ dans le membre de droite.

$\forall\, t \in]-1,1[,\ \forall\, n \in N : V_{h_t}\, T\, V_{h_t^{-1}} = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k L_k$. On peut donc prendre $Z_k = L_k$. Nous obtenons alors du même coup l'existence des limites $\lim_{\eta\to 0} Z_k[\eta]$, les L_k étant nécessairement indépendants de la suite η_n, et les formules $\lim_{\eta\to 0} Z_k[\eta] = Z_k$. La dépendance des Z_k par rapport à $\log h'$ est donc la même que celle des $Z_k[\eta]$. La propriété $\mathcal{A}$ passe donc également à la limite moyennant la remarque suivante : une forme n-linéaire symétrique B est reliée à sa restriction Q à la diagonale par la formule $\mathcal{T}$

$$B(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2^k\, k!} \sum_{\{\varepsilon_j = \pm 1,\, j\in[1,n]\}} (\prod_j \varepsilon_j).Q(\sum_j \varepsilon_j x_j).$$

Le théorème est donc démontré modulo le lemme 3, que nous allons maintenant

démontrer en annexe.

Annexe à la deuxième partie

Dans cette annexe nous allons d'abord démontrer le lemme 3. Puis nous donnerons deux exemples de multiplicateurs sur $\mathbb{R}^n$ pour lesquels on a un résultat d'analyticité.

A_1. Démonstration du lemme 3.

Gardons les notations du lemme 3 et notons $M = \|F\|_{L^\infty(\Omega)}$. La formule de Cauchy nous donne :

$$\forall\, x \in \Omega,\quad \forall\, y \in B,\quad \forall\, k \in \mathbb{N} \qquad \|X_k(x,y)\| \leq 2\pi M \left(\frac{y}{d(x, \complement_B \Omega)}\right)^k .$$

La formule $\mathcal{F}$ nous donne le moyen unique de définir sur B^k une forme k-linéaire symétrique $Y_k(x,.)$ telle que $\forall\, y \in B$: $Y_k(x, y, \ldots y) = X_k(x,y)$. Pour montrer que Y_k est k-linéaire, il suffit de montrer que, pour tout sous espace V de B de dimension finie et toute base $(v_1 \ldots v_n)$ de V, $X_k(x, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$ est un polynôme homogène de degré k par rapport aux λ_i. Or, d'après les estimations sur les X_k, $F(x + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$ est analytique par rapport aux variables $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Il existe donc des polynômes à n variables P_k homogènes de degré k tels que : $F(x + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) = \sum_{k \in \mathbb{N}} P_k(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ pourvu que les λ_i soient petits, et dans ce cas : $\sum_{k \in \mathbb{N}} P_k(.. \lambda_i ..) = \sum_{k \in \mathbb{N}} X_k(x, \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n)$. En faisant tendre les λ_i vers 0 et en utilisant les estimations sur les X_k, on voit par récurrence sur k que l'égalité précédente a lieu terme à terme, ce qu'on voulait démontrer. $Y_k(x,.)$ est donc k-linéaire. Toujours en utilisant les estimations sur les X_k et la formule ($\mathcal{F}$), on voit que $Y_k(x,.)$ est continue. CQFD

A_2. Application du théorème 1 à l'étude de deux multiplicateurs sur $\mathbb{R}^n$.

Les deux multiplicateurs que nous considérons ici sont ceux associés aux fonctions $\frac{\xi}{|\xi|}$ et $|\xi|^{i\gamma}$, $|\xi|$ étant défini sur $\mathbb{R}^n$ par $|(\xi_1, \ldots, \xi_n)| = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2)^{1/2}$. Nous pouvons remarquer que ces deux fonctions vérifient la conclusion de la proposition 1 en prolongeant $|\xi|$ comme suit. Soit $(\xi_1, \ldots, \xi_n) = (a_1 + ib_1, \ldots, a_n + ib_n)$, tel que $\sum_{i=1}^{n} b_i^2 < \sum_{i=1}^{n} a_i^2$: on définit $|(\xi_1, \ldots, \xi_n)| = \left[(a_1+ib_1)^2 + \ldots + (a_n+ib_n)^2\right]^{1/2}$ sans ambiguité car la condition sur ξ entraîne $\mathrm{Re}(\sum_j (a_j + ib_j)^2) > 0$. Il est immédiat qu'on peut prolonger les fonctions $\frac{\xi}{|\xi|}$ et $|\xi|^{i\gamma}$ à l'ouvert $\left\{\xi \in \mathbb{C}^n,\ |\mathrm{Im}\ \xi| < |\mathrm{Re}\ \xi|\right\}$ en deux fonctions analytiques bornées. Il est donc naturel de conjecturer le théorème suivant.

THEOREME 2. Les multiplicateurs T_1 et T_2 associés aux fonctions m_1 et m_2 définies sur $\mathbb{R}^n$ par $m_1(\xi) = \frac{\xi}{|\xi|}$ et $m_2(\xi) = |\xi|^{i\gamma}$ vérifient la propriété $\mathcal{A}$.

Le principe de la démonstration de ce théorème est le suivant : 1. $\mathcal{M}_h$ désignant l'opérateur de multiplication par le jacobien de h, on exprime $V_h\, T\, V_{h^{-1}} (\mathcal{M}_h)^{-1}$ au moyen de son noyau. 2. On passe alors en coordonnées sphériques et on se sert du théorème 1 pour exprimer les opérateurs dérivés au moyen de leurs noyaux. 3. Ceux-ci étant des intégrales sur S^{n-1} de noyaux d'opérateurs dérivés de multiplicateurs sur $\mathbb{R}$ permettant l'application du théorème 1, on majore la norme des opérateurs dérivés.

Une légère difficulté se dressera dans le cas de T_2 car son noyau est $\frac{1}{|x-y|^{n+i\gamma}}$. T_2 n'est donc pas défini comme une valeur principale alors que T_1 l'est.

Démonstration du théorème 2.

Nous nous intéressons d'abord à T_1. Nous montrerons ensuite comment adapter la démonstration à T_2.

Soit $h \in \mathcal{H}_o(\mathbb{R}^n)$, p. p. différentiable vérifiant $\|J_h - I_n\|_\infty < \varepsilon_o$. Soit φ

défini par $\varphi(x) = h(x) - x$. On sait que T_1 est défini pour $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ par :

$$(T_1 f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{x-y}{|x-y|^{n+1}} f(y)\, dy.$$

Notons $K(x,y)$ le noyau $\dfrac{x-y}{|x-y|^{n+1}}$.

$$(V_h\, T\, V_{h^{-1}})(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|h(x)-h(y)|>\varepsilon} K(h(x),h(y)) f(y)\, |\det J_h(y)|\, dy .$$

Comme on peut le voir en passant en coordonnées sphériques, la différentiabilité de h entraîne que

$$(V_h\, T\, V_{h^{-1}})(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(h(x),h(y)) f(y)\, |\det J_h(y)|\, dy .$$

Nous allons en fait montrer que l'opérateur T_h défini pour $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ par :

$$(T_h f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} K(h(x),h(y))\, f(y)\, dy$$

est analytique en h'. Ceci est équivalent à notre propos car la multiplication par $\det J_h$ est analytique en h'.

Passons en coordonnées sphériques. Σ désigne l'ensemble des vecteurs unitaires de $\mathbb{R}^n$.

$$2(T_h f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\vec{u} \in \Sigma} \left(\int_{|t|>\varepsilon} K(h(x),h(y))\, f(y)\, |t|^{n-1}\, dt \right) d\sigma$$

y désigne ici $x + t\,\vec{u}$. Les coordonnées de φ et de $\vec{u}$ sont supposées rapportées à une base orthonormée $(\vec{e_i})$

$$K(h(x),h(y)) = \frac{(t\,\vec{u} + \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i(x) - \varphi_i(y))\,\vec{e_i})}{(\sum_{i=1}^{n} u_i^2 t^2 + 2u_i t(\varphi_i(x)-\varphi_i(y)) + (\varphi_i(x)-\varphi_i(y))^2)^{\frac{n+1}{2}}}$$

$K(h(x), h(y)).\, |t|^n$ est borné par une constante C_{ε_o}.

L'égalité précédente nous montre que, pour tout $\vec{u}$ dans Σ, il existe dans $\mathbb{R}^n$ des constantes $C_{j_1 \ldots j_k}$ (où $(j_1 \ldots j_k) \in [1,n]^k$) telles que :

$$K(h(x),h(y))\,|t|^{n-1} = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{+\infty}\ \sum_{\{j_i\}} C_{j_1\cdots j_k}\ \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\varphi_{j_i}(x)-\varphi_{j_i}(y)}{t}\right).$$

Ces constantes vérifient de plus, pour un certain A indépendant de $\vec{u}$:

$$\forall\, k\in\mathbb{N}\qquad \sum_{(j_1\cdots j_k)\in[1,n]^k} |C_{j_1\cdots j_k}| < K\,|A|^k.$$

Le fait que, dans l'expression de $T_h f(x)$, on puisse développer le noyau en série et inverser les signes $\lim_{\varepsilon\to 0}$ et Σ, découle par un procédé standard du lemme suivant :

LEMME. $\exists\, C>0$, $\exists\,\delta>0$ <u>telles que si</u> $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_k$ <u>sont</u> k <u>fonctions lipschitziennes, l'opérateur défini pour</u> $f\in C_o^\infty(\mathbb{R})$ <u>par</u> :

$$Rf(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{1}{x-y}\ \prod_{i=1}^{k}\ \frac{\varphi_i(x)-\varphi_i(y)}{x-y}\, f(y)\,dy$$

<u>est continu sur</u> L^2 <u>et vérifie</u> : $\|R\| < \frac{C}{\delta^k}\ \prod_{i=1}^{k}\ \|\varphi_i'\|_\infty$.

L'analyticité de T_h en fonction de h' est alors immédiate. Il reste donc à démontrer le lemme.

<u>Démonstration du lemme</u>.

En considérant la formule $\mathcal{F}$ de la page 51, on voit qu'il suffit de montrer le lemme lorsque $\varphi_1 = \varphi_2 = \ldots = \varphi_k$, quitte à changer les valeurs de δ et C. D'autre part, la limite définissant $Rf(x)$ existe p. p. Quitte à nouveau à changer C, il suffit donc de montrer le lemme en remplaçant R par l'opérateur $R_\varepsilon(k,\varphi)$ défini pour $f\in C_o^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$\left[R_\varepsilon(k,\varphi)\right](f)(x) = \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{1}{x-y}\left(\frac{\varphi(x)-\varphi(y)}{(x-y)}\right)^k f(y)\,dy\ .$$

La nouvelle constante C devra être indépendante de ε.

Nous renvoyons à [2] pour la définition et les propriétés des noyaux et opérateurs de Calderon-Zygmund. En particulier le lemme 1 de la page 45 nous montre

que l'opérateur $V_h T V_{h^{-1}}$ qui y est considéré est un opérateur de Calderon-Zygmund. En utilisant le théorème 21 de [2], on peut voir que le théorème 1 de la page 42 reste valable si l'on remplace $V_h T V_{h^{-1}}$ (ici égal à $V_h H V_{h^{-1}}$) par $(V_h H V_{h^{-1}})_\varepsilon$ défini pour $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ par :

$$(V_h H V_{h^{-1}})_\varepsilon(f)(x) = \int_{|y-x|>\varepsilon} \frac{1}{h(x) - h(y)} f(y)\, dy .$$

Considérons pour $\lambda \in \mathbb{C} / |\lambda| \leq 1$, $h_\lambda : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ défini par $h_\lambda(0) = 0$ et $h'_\lambda = 1 + \lambda\varphi'$. En appliquant la formule de Cauchy, on obtient aussitôt l'estimation désirée et donc le lemme. Notons qu'alors le développement en série entière de $(V_h H V_{h^{-1}})_\varepsilon$ est donné par

$$(V_h H V_{h^{-1}})_\varepsilon = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \left[R_\varepsilon(k,\varphi)\right].$$

Les majorations des $\|R_\varepsilon(k,\varphi)\|$ montrent que la convergence de la série a lieu au sens normal.

Pour terminer la démonstration du théorème 2, nous devons traiter le cas de T_2. La seule différence avec le cas de T_1 est que le noyau de T_2 : $L(x,y) = \frac{1}{|x-y|^{n+i\gamma}}$, n'est pas un noyau de Calderón-Zygmund, bien que T_2 soit un opérateur de Calderón-Zygmund. Les opérateurs $(T_2)_\varepsilon$ étant uniformément bornés (cf. proposition 3 page 98 de [2]), on peut choisir une suite ε_n tendant vers 0 telle que $(T_2)_{\varepsilon_n}$ ait une limite faible. Le rapport entre T_2 et cette limite est éclairé par le lemme suivant, qui est classique :

LEMME. Un opérateur continu sur L^2 qui envoie toute fonction $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ sur une fonction dont le support est inclus dans celui de f est une multiplication par une fonction bornée.

La différence entre T_2 et la limite vérifie les hypothèses du lemme. D'autre part, elle commute avec les translations. C'est donc une multiplication par une constante.

Sans entrer dans les détails, signalons qu'on peut, comme dans le cas de T_1,

trouver un développement en série pour $(V_h T_2 V_{h^{-1}})_\varepsilon$. On choisit maintenant une sous-suite de ε_n (notée η_n) telle que tous les termes de la série aient une limite faible. On peut inverser Σ et $\lim_{n\to+\infty}$ en vertu de la décroissance des termes, ce qui donne le développement en série de $\lim_{n\to+\infty} (V_h T_2 V_{h^{-1}})_{\eta_n}$. La différence entre cette limite et $V_h T_2 V_{h^{-1}}$ est également une multiplication par une fonction bornée $A(\varphi)$. La conclusion découle du lemme 3 de la page 50 par un procédé standard dès que l'on a montré que $A(\varphi)$ est séparément analytique en φ'. Nous allons maintenant finir en donnant le schéma de ce dernier calcul.

Commençons par remarquer que si $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2$

$\varepsilon_2 = \varepsilon_1 e^{\frac{2\pi}{\gamma}} \Longrightarrow \int_{\varepsilon_1}^{\varepsilon_2} (\frac{1}{t})^{1+i\gamma}\, dt = 0$. Nous supposons donc que la suite ε_n est une sous-suite de la suite $\exp(-\frac{2n\pi}{\gamma})$, de telle sorte que, $f \in C_o^\infty(\mathbb{R}^n)$ étant fixée, les limites suivantes existent p. p.

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|x-y|>\eta_n} \frac{1}{|h(x)-h(y)|^{n+i\gamma}} f(y)\, dy$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{|h(x)-h(y)|>\eta_n} \frac{1}{|h(x)-h(y)|^{n+i\gamma}} f(y)\, dy.$$

Nous savons que la différence entre ces deux limites est de la forme $(A(\varphi))(x).f(x)$. Supposons f égale à 1 au voisinage de x. Un calcul facile nous donne alors la valeur de $(A(\varphi))(x)$, soit :

$$(A(\varphi))(x) = \int_{\vec{u}\in\Sigma} (1 - \|h'(x).\vec{u}\|^{-i\gamma}).\|h'(x).\vec{u}\|^{-1}\, d\sigma .$$

$\|.\|$ désigne ici la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$. On obtient donc l'analyticité globale de $A(\varphi)$ en fonction de φ' au voisinage de l'origine.

Nous terminons ici la démonstration du théorème 2.

Conclusion

Le théorème 2 (dont nous avons seulement esquissé la démonstration) appelle les commentaires suivants.

Le choix particulier du symbole $m(\xi)$ ($\frac{\xi}{|\xi|}$ ou $|\xi|^{i\gamma}$) a eu pour seul rôle de simplifier la démonstration.

Il semblerait que R. Coifman ait pu obtenir l'énoncé correspondant au théorème 2 dans le cas plus général où $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{C}$ peut se prolonger en une fonction holomorphe et bornée sur le cône $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ défini par $z_j = x_j + iy_j$, $1 \leq j \leq n$ et $|y_1| + \ldots + |y_n| < \delta(|x_1| + \ldots + |x_n|)$.

Finalement, si T est un opérateur pseudo-différentiel classique d'ordre 0, on peut se demander s'il existe des résultats aussi satisfaisants que dans le cas de la transformation de Hilbert relatifs à $U_g T U_{g^{-1}}$. Par exemple existe-t-il un $\varepsilon > 0$ et un groupe remarquable $\mathcal{G}_T$ tel que $\|U_g T U_{g^{-1}} - T\| < \varepsilon \Longrightarrow g \in \mathcal{G}_T$, et l'application de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{L}(L^2, L^2)$ qui à g associe $U_g T U_{g^{-1}}$ est-elle analytique ? Même dans le cas de la transformation de Beurling, le groupe quasi-conforme d'Ahlfors n'est pas la réponse satisfaisante au problème que nous venons de poser. Dans le cas des transformations de Riesz, le groupe lipschitzien donne l'analyticité. Est-il imposé par la continuité ?

Bibliographie

[1] AHLFORS, S. L. Lectures on quasi-conformal mappings. Princeton (1966).

[2] COIFMAN, R. R. et MEYER, Y. Au delà des opérateurs pseudo-différentiels. Astérisque no. 57.

[3] _____ Le théorème de Calderón par les méthodes de variable réelle. C. R. Acad. Sc. Paris 289 (1979), 425-428.

[4] _____ Fourier analysis of multilinear convolutions, Calderon's theorem and analysis on Lipschitz curves. Lecture Notes 779. Springer-Verlag.

[5] DAVID, G. Courbes de Lavrentiev et intégrales singulières. Thèse à paraître (Orsay) (1981).

[6] DAVID, G., MEYER, Y., ZINSMEISTER, M. La transformation de Hilbert et ses conjugués par changements de variable. A paraître.

[7] FEFFERMAN, C. and STEIN, E. H^p spaces of several variables. Acta Math. 129 (1972), 137-193.

[8] HILLE, E. Lectures on ordinary differential equations, chez Addison-Wesley.

[9] JOHN, F. and NIRENBERG, L. On functions of bounded mean oscillation. Comm. Pure and Appl. Math. 14 (1961), 415-426.

[10] JONES, P. W. Homeomorphisms on the line which conserve BMO. A paraître dans Comm. Math. Helv.

[11] KENIG, C. E. Weighted Hardy spaces on Lipschitz domains. Amer. J. Math. 102 (1980), 129-163.

[12] MOSTOW, G. D. Quasi-conformal mappings in n-space and the rigidity of the hyperbolic space forms. IHES no. 34 (1968), 53-104.

[13] POMMERENKE, C. Schichte Funktionen und analytische Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. Comm. Math. Helv. 62 (1977), 591-602.

[14] REIMANN, H. M. und RYCHENER, R. Funktionen von beschränkter mittlerer Oszillation. Lecture Notes no. 487. Springer-Verlag.

[15] SCHWARTZ, L. Théorie des distributions. Hermann. Paris.

[16] ZINSMEISTER, M. Espaces de Hardy généralisés. Thèse à paraître (Orsay).

no. d'impression 491
2ème trimestre 1981